Problema săptămânii 403

Arătaţi că, pentru orice număr prim p, există n natural astfel încât $2^n + 3^n + 6^n - 1$ să fie divizibil cu p.

Soluţie: Pentru $p = 2$ putem lua orice n natural, iar pentru $p = 3$ putem alege n orice număr par nenul. Să presupunem în continuare că $p \geq 6$. Atunci $(6, p) = 1$, deci concluzia este echivalentă cu a găsi un n pentru care $6(2^n + 3^n + 6^n - 1)$ este divizibil cu p.
Putem alege $n = p - 2$ şi vom demonstra că $6(2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1) = 3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6^{p-1} - 6$ este divizibil cu p. Cum 2, 3 şi 6 sunt prime cu p, din mica teoremă a lui Fermat avem că $2^{p-1} \equiv 3^{p-1} \equiv 6^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, deci $3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6^{p-1} - 6 \equiv 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 - 6 \equiv 0 \pmod p$, de unde concluzia.

Remarcă: Mica teoremă a lui Fermat ne spune că inversul modulo p unui element a este $a^{-1} \equiv a^{p-2} \pmod p$, iar apoi folosim analogul relaţiei $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - 1 = 0$: avem $2^{-1} + 3^{-1} + 6^{-1} \equiv 1 \pmod p$.

Remarcă: (*Gheorghe Iurea*)
Pentru orice număr prim p există chiar o infinitate de numere n cu proprietatea din enunţ: pentru $p = 2$ convine orice n natural, pentru $p = 3$ convine orice n par, nenul, iar pentru $p \geq 5$ convine orice n de forma $n = (p-1)k + p - 2$, $k \in \mathbb{N}$.

Am primit soluţii de la: *Horia Căşuneanu, Ioan Viorel Codreanu, Gheorghe Iurea, Eric-Dimitrie Cismaru* şi *Alberto-Mihai Radu.*

Problem of the week no. 403

Prove that, for every prime number p, there exists a positive integer n such that $2^n + 3^n + 6^n - 1$ is divisible by p.

Solution: For $p = 2$ we can take any n, while for $p = 3$ we can pick any even n. Let us assume in the sequel that $p \geq 6$. We have $(6, p) = 1$, therefore the conclusion is equivalent to finding an n for which $6(2^n + 3^n + 6^n - 1)$ is divisible by p.
We choose $n = p-2$ and prove that $6(2^{p-2}+3^{p-2}+6^{p-2}-1) = 3 \cdot 2^{p-1}+2 \cdot 3^{p-1}+6^{p-1}-6$ is divisible by p. As 2, 3 and 6 are co-prime with p, from Fermat's little theorem we get that $2^{p-1} \equiv 3^{p-1} \equiv 6^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, i.e. $3 \cdot 2^{p-1}+2 \cdot 3^{p-1}+6^{p-1}-6 \equiv 3 \cdot 1+2 \cdot 1+1-6 \equiv 0 \pmod p$, hence the conclusion.

Remark: Fermat's little theorem says that the inverse modulo p of a number a is $a^{-1} \equiv a^{p-2} \pmod p$. Next, we use the analogue of $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - 1 = 0$: we have $2^{-1} + 3^{-1} + 6^{-1} \equiv 1 \pmod p$.