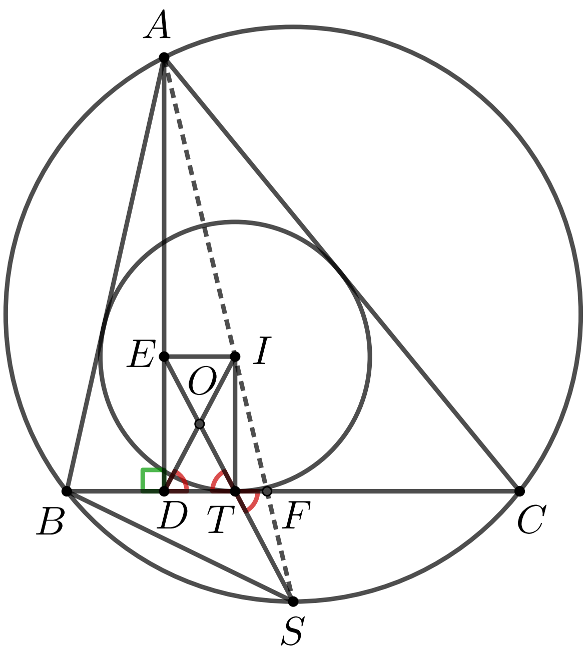
Problema săptămânii 401

Fie ABC un triunghi, I centrul cercului său înscris, iar D piciorul înălţimii din A. Cercul înscris este tangent laturii BC în punctul T, iar bisectoarea $(AI$ intersectează cercul circumscris în punctul S. Demonstraţi că $\sphericalangle IDC \equiv \sphericalangle STC$.

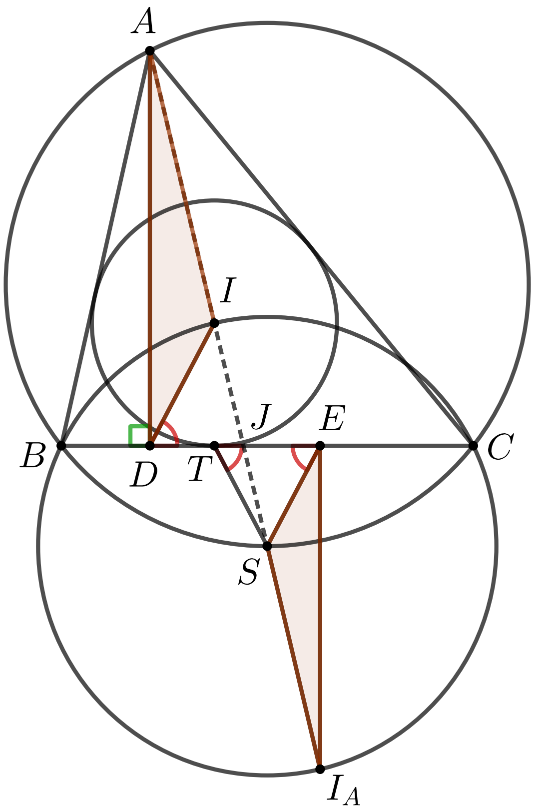
Romantics of Geometry

Soluţia 1: (*Maria Ciucu*)
Construim dreptunghiul $DTIE$, $E \in AD$ şi ne propunem să arătăm că punctele E, T şi S sunt coliniare.
Fie $\{O\} = DI \cap ET$ şi $\{F\} = AS \cap BC$.
Din teorema lui Thales avem $\frac{DE}{EA} = \frac{FI}{IA}$, iar din teorema bisectoarei $\frac{FI}{IA} = \frac{BF}{BA}$.
Aşadar, $\frac{DE}{EA} = \frac{BF}{BA}$.
Pe de altă parte, din incenter-excenter Lemma, $SI = SC$, iar din asemănarea $\Delta ASC \sim \Delta ABF$ (UU) avem $\frac{SI}{AS} = \frac{SC}{AS} = \frac{BF}{AB}$.
Conform reciprocei teoremei lui Menelaus aplicată în triunghiul AID, relaţia
$\frac{DE}{EA} \cdot \frac{AS}{SI} \cdot \frac{IO}{OD} = 1$ arată că punctele E, O, S sunt coliniare, deci E, O, T, S sunt coliniare. Atunci $\sphericalangle STC = \sphericalangle ETD = \sphericalangle IDT = \sphericalangle IDC$.



Observaţie: (*Titu Zvonaru, Horia Căşuneanu*)
Dacă I_A este centru cercului A-exînscris, iar E este punctul de contact al acestuia cu latura BC, concluzia problemei este echivalentă cu a arăta că triunghiurile AID şi I_ASE sunt asemenea. Într-adevăr, ar rezulta că $\sphericalangle ADI = \sphericalangle SEI_A$, deci $\sphericalangle IDC = \sphericalangle SEB$. Dar triunghiurile BTS şi CES sunt congruente (LUL), deci $\sphericalangle SEB = \sphericalangle STC$, de unde concluzia.

Soluţia 2: (*Andrei Eckstein*, inspirată de observaţia de mai sus)
Vom folosi notaţiile introduse la observaţia de mai sus şi vom nota $\{J\} = AS \cap BC$. Din Incenter-Excenter Lemma ştim că patrulaterul BI_ACI este inscriptibil. Punctul J se află pe dreapta BC, axa radicală a cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC, respectiv IBC, deci are puteri egale faţă de cele două cercuri: $JI \cdot JI_A = JS \cdot JA$, adică avem $\dfrac{JI}{JA} = \dfrac{JS}{JI_A}$. Cum triunghiurile ADJ şi I_AEJ sunt asemenea, relaţia precedentă arată că şi triunghiurile ADI şi I_AES sunt asemenea (LUL), de unde, în baza observaţiei de mai sus, rezultă concluzia.



Observaţie: Cu notaţiile de mai sus, are loc următoarea proprietate remarcabilă: dreptele EI, ST, cercul circumscris triunghiului ABC şi cercul de diametru $[AI]$ au un punct comun. Puteţi consulta problemele săptămânilor 129 şi 345, precum şi materialul despre The Sharky-Devil Point. În comentariile acestui material găsiţi diverse probleme legate de această configuraţie.

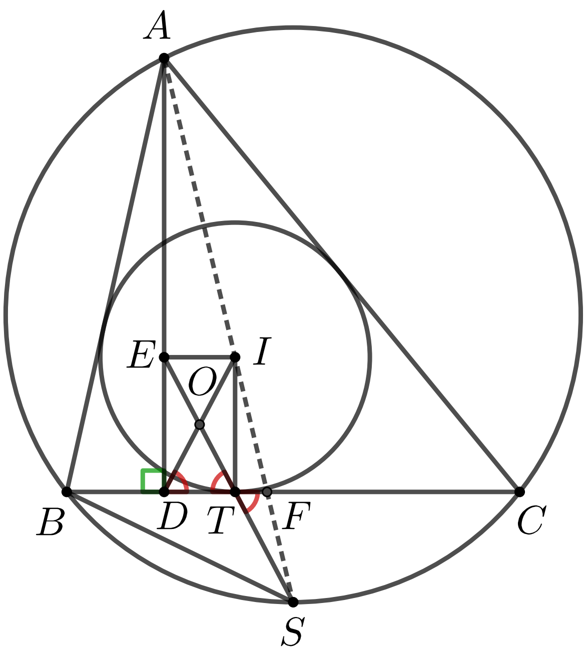
Am primit soluţii de la: *Maria Ciucu, Robert Isepciuc, Gheorghe Iurea, Titu Zvonaru* şi *Horia Căşuneanu.*

Problem of the week no. 401

Let I be the incenter of triangle ABC, and let D be the foot of the altitude from A. The incircle touches the side BC at T, and the bisector $(AI$ intersects the circumcircle at S. Prove that $\sphericalangle IDC \equiv \sphericalangle STC$.

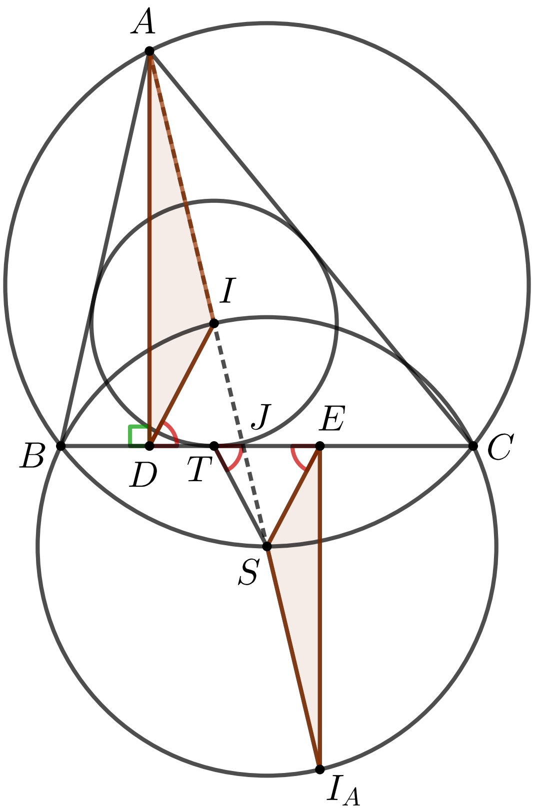
Romantics of Geometry

Solution 1: (*Maria Ciucu*)
We construct the rectangle $DTIE$, $E \in AD$, and we aim to prove that points E, T and S are collinear.
Consider $\{O\} = DI \cap ET$ and $\{F\} = AS \cap BC$.
We have $\dfrac{DE}{EA} = \dfrac{FI}{IA}$, and from the Angle bisector theorem we have $\dfrac{FI}{IA} = \dfrac{BF}{BA}$.
Combining these two yields $\dfrac{DE}{EA} = \dfrac{BF}{BA}$.
On the other hand, from the Incenter-excenter Lemma we get $SI = SC$, therefore the similarity $\Delta ASC \sim \Delta ABF$ (AA) shows that $\dfrac{SI}{AS} = \dfrac{SC}{AS} = \dfrac{BF}{AB}$.
According to the converse of Menelauss theorem applied in triangle AID, the relation $\dfrac{DE}{EA} \cdot \dfrac{AS}{SI} \cdot \dfrac{IO}{OD} = 1$ shows that points E, O, S are collinear, hence E, O, T, S are collinear. We conclude that $\sphericalangle STC = \sphericalangle ETD = \sphericalangle IDT = \sphericalangle IDC$.



Remark: (*Titu Zvonaru, Horia Căşuneanu*)
If I_A is the A-excenter, and E is its projection onto the side BC, the conclusion of the problem follows from the similarity of triangles AID and I_ASE are similar. Indeed, it would follow that $\sphericalangle ADI = \sphericalangle SEI_A$, hence $\sphericalangle IDC = \sphericalangle SEB$. But triangles BTS and CES are congruent (SAS), therefore $\sphericalangle SEB = \sphericalangle STC$, and the conclusion.

Solution 2: (*Andrei Eckstein*, inspired by the previous remark)
We shall use the notations introduces in the remark and also $\{J\} = AS \cap BC$. From the Incenter-Excenter Lemma we know that the quadrilateral BI_ACI is cyclic. Point J belongs to the line BC, the radical axis of the circumcircles of triangle ABC and quadrilateral IBI_AC, therefore it has equal powers with respect to the two circles: $JI \cdot JI_A = JS \cdot JA$, i.e. we have $\dfrac{JI}{JA} = \dfrac{JS}{JI_A}$. As triangles ADJ and I_AEJ are similar, the previous relation indicates that triangles ADI and I_AES are also similar (SAS), hence, in vertue of the previous remark, the conclusion follows.



Remark: We the notations from Solution 2, we have the following interesting property: lines EI, ST, the circumcircle of ABC and the circle of diameter $[AI]$ have a common point. You can consult the problems of weeks 129 and 345, as well as the material The Sharky-Devil Point. In the comments of this material you can find other related problems.