Problema săptămânii 400

Fiind date $n \geq 2$ puncte pe un cerc, Ana şi Bogdan joacă următorul joc. La început, un pion este plasat pe unul din cele n puncte şi nu este trasat niciun segment. Cei doi jucători mută alternativ, începând cu Ana. Jucătorul aflat la rând mută pionul din punctul în care se află acesta, să-i spunem P, într-unul din celelalte $n-1$ puncte, să-i spunem Q, apoi trasează segmentul $[PQ]$. Această mutare este permisă numai dacă segmentul $[PQ]$ nu este deja trasat. Primul jucător care nu mai poate muta pierde, iar adversarul său câştigă.
Stabiliţi, pentru fiecare n, care din cei doi jucători îşi poate asigura victoria indiferent de alegerile adversarului său.

Olimpiada Francofonă de Matematică, 2024

Soluţie:
Vom arăta că Ana are strategie de câştig oricare ar fi $n \geq 2$.
Pentru $n = 2$ acest lucru este evident.
Dacă $n \geq 3$, dacă iniţial pionul se află în punctul S, la prima ei mutare Ana îl mută într-un punct B şi trasează segmentul $[AB]$. Bogdan va muta pionul din B într-un punct nefolosit anterior, C şi va trasa segmentul $[BC]$. Ana va aduce pionul înapoi în punctul A, trasând segmentul $[CA]$. Astfel, pionul nu mai poate fi mutat în C nici din A, nici din B. Strategia Anei va fi de a aduce mereu pionul înapoi într-unul din punctele A sau B. Bogdan va putea, eventual, muta pionul într-un punct nou, nefolosit anterior (câtă vreme mai există asemenea puncte). El va uni unul din punctele A şi B cu punctul nou, dar Ana va putea uni punctul nou cu celălalt dintre punctele A şi B. De acum, punctul în care a mutat Bogdan nu mai este accesibil nici din A, nici din B, deci Bogdan va trebui să mute într-un punct nefolosit anterior.
Aşadar, câtă vreme Bogdan are mutare, şi Ana are mutare, deci ea nu va pierde. Cum jocul trebuie să se termine la un moment dat, Ana este cea care va câştiga.

Am primit soluţii de la: *Gheorghe Iurea, Maria Ciucu, Vlad Emil Giurgiu, Horia Căşuneanu* şi *Robert Isepciuc.*

Problem of the week no. 400

On a circle there are $n \geq 2$ given points. Ann and Bob play the following game. Initially, there is a pawn placed on one of the n given points and there are no segments drawn. The two players move alternately, with Ann moving first. The player on turn, moves the pawn from the point where it was, say P, to one of the other $n-1$ given points, then draws the line segment $[PQ]$. This move is only allowed if $[PQ]$ has not been drawn before. The first player that can not move loses the game, and his opponent wins.
Determine, for each n, which of the two players can win regardless of the choices of his opponent.

Official solution:
Ann has a winning strategy regardless of n.
Let S be the starting point of the pawn and let P be one of the remaining $n-1$ points. On her first move, Ann chooses to move the pawn from S to P. Thus, after this move, the line segment $[SP]$ is drawn. On each of his moves, Bob must move either from S to X (first case) or from P to X (second case) for a point X that has not been visited before. Ann replies by returning the pawn to point P in the first case, or to the point S in the second case. Thus, after each of Anns moves, the pawn is either at S or at P and for each of the other points Y, the line segments $[SY]$ and $[PY]$ have either both been drawn or none of them have been drawn. It follows that Bob must visit a new point, moving away from either S or P and allowing Ann to move back to P or S, respectively.
We conclude that Ann can not lose the game. As there are only finitely many line segments to be drawn, the game has to end, which means that Bob will lose.