Problema săptămânii 399

Determinaţi numerele naturale $n \geq 2$ şi numerele naturale nenule $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ care satisfac simultan următoarele condiţii:

• $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$,
• a_n este număr prim,
• pentru orice număr natural k de la 1 la n, a_k divide $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Test EGMO, Japonia, 2024

Soluţie:
Fie $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ numere cu proprietăţile din enunţ. Atunci a_n divide $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, deci există $c \in \mathbb{N}$ pentru care $ca_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n < na_n$. Deducem că $n > c$. Ştim că a_k divide ca_n pentru orice k şi că a_n este prim, deci trebuie ca $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ să îl dividă pe c. Dar avem pe de-o parte $a_1 \geq 1$, $a_2 \geq 2$, $\ldots$, $a_{n-1} \geq n - 1$, iar pe de altă parte $a_{n-1} \leq c < n$. Deducem că $c = a_{n-1} = n - 1$, $a_{n-2} = n - 2$, $\ldots$, $a_1 = 1$. Conchidem că $n - 1$ este divizibil cu toate numerele naturale nenule mai mici decât el, deci $n \leq 3$.
Pentru $n = 2$ avem $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ care nu verifică $a_2 \mid a_1 + a_2$.
Pentru $n = 3$ avem $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ şi $a_3 = 3$, numere care au într-adevăr proprietatea din enunţ.

Am primit soluţii de la: *Eric-Dimitrie Cismaru, Maria Ciucu* şi *Gheorghe Iurea.*

Problem of the week no. 399

Find all sets of integers $n \geq 2$ and positive integers $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ that satisfy all of the following conditions:

• $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$,
• a_n is a prime number,
• for any integer k between 1 and n, a_k divides $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Japan EGMO Test, 2024

Solution:
Let $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ satisfy the conditions of the statement. Then a_n divides $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, which means that there exists a $c \in \mathbb{N}$ such that $ca_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n < na_n$. We get that $n > c$. We know that a_k divides ca_n for all k and, as a_n is a prime, it is necessary that $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ divide c. But on one hand we have $a_1 \geq 1$, $a_2 \geq 2$, $\ldots$, $a_{n-1} \geq n - 1$, and on the other hand $a_{n-1} \leq c < n$. It follows that $c = a_{n-1} = n - 1$, $a_{n-2} = n - 2$, $\ldots$, $a_1 = 1$. We conclude that $n - 1$ is divisible by all the positive integers less than itself, i.e. $n \leq 3$.
For $n = 2$ we have $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ which do not satisfy $a_2 \mid a_1 + a_2$.
For $n = 3$ we have $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, which do indeed satisfy all the conditions of the statement.