Problema săptămânii 398

Determinaţi toate tripletele $(x,\ y,\ z)$ de numere întregi care verifică simultan relaţiile:

$$x^3 - 4x^2 - 16x + 60 = y,$$
$$y^3 - 4y^2 - 16y + 60 = z,$$
$$z^3 - 4z^2 - 16z + 60 = x.$$

Olimpiadă Germania, 2003

Soluţie: Ecuaţiile se scriu echivalent astfel:

$$(x-4)^2(x+4) = y+4,$$
$$(y-4)^2(y+4) = z+4,$$
$$(z-4)^2(z+4) = x+4.$$

De aici se vede că dacă una din variabile este egală cu -4, atunci toate sunt egale cu -4 şi că $(-4,-4,-4)$ este o soluţie a problemei.
Dacă x, y, z sunt toate diferite de -4, atunci înmulţind relaţiile obţinute şi împărţind apoi cu $(x+4)(y+4)(z+4) \neq 0$ obţinem $(x-4)^2(y-4)^2(z-4)^2 = 1$, deci $(x-4)^2 = (y-4)^2 = (z-4)^2 = 1$. Revenind la ecuaţiile de mai sus deduce că $x+4 = y+4 = z+4$, adică $x = y = z$, deci $(x-4)^2 = 1$ arată că putem avea $(x, y, z) = (3, 3, 3)$ sau $(x, y, z) = (5, 5, 5)$ care, împreună cu $(-4, -4, -4)$, sunt întradevăr singurele soluţii ale sistemului.

Am primit soluţii de la: *Gheorghe Iurea, Eric-Dimitrie Cismaru, Luca Mureşan, Adrian Zanca, Titu Zvonaru* şi *Maria Ciucu.*

Problem of the week no. 398

Find all triples $(x,\ y,\ z)$ of integers satisfying the following system of equations:

$$x^3 - 4x^2 - 16x + 60 = y,$$
$$y^3 - 4y^2 - 16y + 60 = z,$$
$$z^3 - 4z^2 - 16z + 60 = x.$$

German Olympiad, 2003

Solution: We rewrite the equations as follows:

$$(x-4)^2(x+4) = y+4,$$
$$(y-4)^2(y+4) = z+4,$$
$$(z-4)^2(z+4) = x+4.$$

We can see that if one of the variables is equal to -4, then all of them ar equal to -4 and $(-4,-4,-4)$ is a solution of the system.

If x, y, z are all different from -4, then multiplying the relations from above and the dividing by $(x+4)(y+4)(z+4) \neq 0$ we get $(x-4)^2(y-4)^2(z-4)^2 = 1$, hence $(x-4)^2 = (y-4)^2 = (z-4)^2 = 1$. Returning to the equations we have obtained, we get $x+4 = y+4 = z+4$, i.e. $x = y = z$, therefore $(x-4)^2 = 1$ shows that we can have either $(x, y, z) = (3, 3, 3)$ or $(x, y, z) = (5, 5, 5)$ which, together with $(-4, -4, -4)$, are indeed the only solutions to the system.