**Problema Săptămânii 394**

Fie $a, b, c$ numere reale pozitive astfel încât $a+b+c=3$. Arătați că

$$\frac{a^2}{b^2+1}+\frac{b^2}{c^2+1}+\frac{c^2}{a^2+1}\geq \frac{3}{2}\,.$$

**Soluția 1:** Folosim inegalitatea lui Titu Andreescu,

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{b^2+1}=\sum_{cyc}\frac{(a^2)^2}{a^2b^2+a^2}\geq \frac{(\sum a^2)^2}{\sum a^2b^2+\sum a^2}\,.$$

Notăm $a^2 \overset{\text{not}}{=} x, b^2 \overset{\text{not}}{=} y$ și $c^2 \overset{\text{not}}{=} z$. Este suficient să arătăm că $2(x+y+z)^2\geq 3\sum\limits_{cyc}xy+3\sum\limits_{cyc}x$. Ținând cont că $a+b+c=3$ și folosind din nou inegalitatea lui Titu Andreescu, obținem

$$x+y+z=a^2+b^2+c^2\geq \frac{(a+b+c)^2}{3}=3\Leftrightarrow (x+y+z)^2\geq 3(x+y+z).$$

Concluzia urmează adunând inegalitățile $(x+y+z)^2\geq 3\sum\limits_{cyc}x$ și $(x+y+z)^2\geq 3\sum\limits_{cyc}xy$, cea din urmă inegalitate fiind echivalentă cu $\frac{1}{2}\cdot\sum\limits_{cyc}(x-y)^2\geq 0$, evident.

**Soluția 2:** Rescriem membrul stâng al inegalității astfel:

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{b^2+1}=\sum_{cyc}\left(a^2-\frac{a^2b^2}{b^2+1}\right)=\sum_{cyc}a^2-\sum_{cyc}\frac{a^2b^2}{b^2+1}\,.$$

Folosind inegalitatea mediilor, AM-GM, pentru a doua sumă, obținem

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{b^2+1}\geq\sum_{cyc}a^2-\sum_{cyc}\frac{a^2b^2}{2b}\geq\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2\sum_{cyc}a^2\geq 3+\sum_{cyc}a^2b.$$

Din *Soluția 1*, $\sum\limits_{cyc}a^2\geq 3$, deci rămâne ca $\sum\limits_{cyc}a^2\geq\sum\limits_{cyc}a^2b$. Într-adevăr, înmulțind cu 3, avem

$$3\sum_{cyc}a^2=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)=\sum_{cyc}a^3+\sum_{cyc}a^2(b+c)\geq 3\sum_{cyc}a^2b\ .$$

Aceasta revine la $\sum\limits_{cyc}(a^3+b^2a-2a^2b)=\sum\limits_{cyc}a(a-b)^2\geq 0$, adevărat.

**Observație:** Putem folosi inegalitatea mediilor $a^3+b^2a\geq 2\sqrt{a^4b^2}=2a^2b$, împreună cu analoagele.

**Soluția 3:** Elimininând numitorii, inegalitatea revine la

$$2\sum_{cyc}a^4c^2+2\sum_{cyc}a^4\geq 3a^2b^2c^2+\sum_{cyc}a^2b^2+\sum_{cyc}a^2+3\,.$$

Din inegalitatea mediilor, $\sum\limits_{cyc}a^4c^2=a^4c^2+b^4a^2+c^4b^2\geq 3\sqrt[3]{(abc)^6}=3a^2b^2c^2$. Prin urmare, este suficient ca $\sum\limits_{cyc}a^4c^2+2\sum\limits_{cyc}a^4\geq\sum\limits_{cyc}a^2b^2+\sum\limits_{cyc}a^2+3$. Adunând în ambii membri ai inegalității $\sum\limits_{cyc}a^2$, obținem forma echivalentă $\sum\limits_{cyc}(a^4c^2+c^2)+2\sum\limits_{cyc}a^4\geq\sum\limits_{cyc}a^2b^2+2\sum\limits_{cyc}a^2+3$. Din inegalitatea mediilor, $\sum_{cyc}(a^4c^2+c^2) \geq 2\sum_{cyc} a^2c^2$, deci avem de demonstrat că $2\sum_{cyc} a^4 + \sum_{cyc} a^2b^2 \geq 2\sum_{cyc} a^2 + 3$ sau, înmulțind prin 2, avem $3\sum_{cyc} a^4 + (a^2+b^2+c^2)^2 \geq 4\sum_{cyc} a^2 + 6$.

Cum $3\sum_{cyc} a^4 \geq 3 \cdot \dfrac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3} = (a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3(a^2+b^2+c^2)$, iar cum $(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3\sum_{cyc} a^2$, inegalitatea revine la $\sum_{cyc} a^2 \geq 3$, ceea ce este evident.

Egalitatea se realizează pentru $a = b = c = 1$.

**Generalizare:** Fie $a, b, c$ numere reale pozitive astfel încât $a+b+c=3$ și fie $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că

$$\frac{a^n}{b^n+1} + \frac{b^n}{c^n+1} + \frac{c^n}{a^n+1} \geq \frac{3}{2}\,.$$

**Soluție:** Aplicând inegalitatea mediilor, obținem

$$\sum_{cyc}[a^n + (n-1)] \geq \sum_{cyc} n\sqrt[n]{a^n} = n\sum_{cyc} a = 3n \text{ sau } \sum_{cyc} a^n \geq 3n - (3n-3) = 3.$$

Folosind inegalitatea lui Titu Andreescu, avem

$$\sum_{cyc}\frac{a^n}{b^n+1} = \sum_{cyc}\frac{(a^n)^2}{(ab)^n + a^n} \geq \frac{(a^n+b^n+c^n)^2}{\sum(ab)^n + \sum a^n} \geq \frac{(a^n+b^n+c^n)^2}{\frac{2}{3}(a^n+b^n+c^n)^2} = \frac{3}{2}\,,$$

unde am folosit $\left(\sum_{cyc} a^n\right)^2 = \sum_{cyc} a^n \cdot \sum_{cyc} a^n \geq 3\sum_{cyc} a^n$ și inegalitatea $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$, pentru $x = a^n, y = b^n$ și $z = c^n$. Egalitatea se atinge pentru $a = b = c = 1$.

**Observație:** Dacă $n = 0$, atunci inegalitatea se transformă în egalitate, oricare ar fi $a, b, c > 0$ pentru care $a+b+c=3$.