HiPerMath by Upper.School (2023-2024)
Program for High Performance in Mathematics
- Ediția a V-a -

Secțiunea Juniori
Simulare 2 - Baraj juniori
03 Martie 2024

- Subiecte -

Selecție probleme
Andrei Eckstein

§1 Subiecte

Problema 1

Fie a, b, c numere reale. Arătaţi că $a^2 + 4b^2 + 8c^2 \geq 2ac + 3ab + 4bc$. Când are loc egalitatea?

Problema 2

Fie $n \geq 2$ un număr natural fixat. Pe un cerc se scriu cu albastru $k \geq 2$ numere, toate aparţinând mulţimii $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Numerele se pot repeta şi nu este obligatoriu ca pe cerc să apară toate elementele lui A. Între oricare două numere vecine scrise cu albastru se scrie cu roşu media loc aritmetică. Aflaţi cea mai mică valoare a lui k pentru care există o alegere a numerelor albastre care face ca printre numerele scrise cu roşu să figureze toate elementele mulţimii A.

Problema 3

Determinaţi tripletele (a, b, c) de numere naturale nenule care au proprietatea că $c.m.m.d.c.(a, b, c) = 1$ şi $a + b + c$ divide $a^n + b^n + c^n$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Problema 4

Fie ABC un triunghi neisoscel, M un punct în interiorul său astfel încât $\sphericalangle ABM = \sphericalangle ACM$, E proiecţia lui M pe bisectoarea interioară a unghiului A, F simetricul lui M faţă de E şi Q mijlocul lui $[BC]$.
a) Arătaţi că $EQ \parallel AF$.
b) Demonstraţi că punctele Q, E şi proiecţia lui M pe bisectoarea exterioară a unghiului A sunt coliniare.

Timp de lucru: 240 de minute.
Pentru fiecare problemă se acordă maxim 7 puncte.
Nu este permisă utilizarea calculatorului sau a oricărui alt instrument, cu excepția riglei și a compasului.