Secțiunea Juniori
Simulare 2 - Baraj juniori
03 Martie 2024

- Soluții -

Selecție probleme
Andrei Eckstein

§1 Soluții

Problema 1

Fie a, b, c numere reale. Arătaţi că $a^2 + 4b^2 + 8c^2 \geq 2ac + 3ab + 4bc$. Când are loc egalitatea?

Olimpiadă Estonia, 2008

Demonstraţie. Putem rescrie echivalent inegalitatea sub forma $3\left(b - \frac{a}{2}\right)^2 + (b-2c)^2 + \left(2c - \frac{a}{2}\right)^2 \geq 0$ sau $\left(a - \frac{3b}{2} - c\right)^2 + \frac{7}{4}(b-2c)^2 \geq 0$. Ambele inegalităţi sunt evidente. Din prima scriere se vede imediat cazul de egalitate $a = 2b = 4c$. Cu scrierea a doua ea rezultă înlocuind $b = 2c$ în $a - \frac{3b}{2} - c = 0$.

O altă variantă este să tratăm expresia ca pe un trinom de gradul II într-una din variabile. Un asemenea trinom păstrează semn constant dacă are $\Delta \leq 0$.

Barem:

- scrie expresia ca pe o sumă de pătrate 5p
- deduce cazul de egalitate (Pentru ghicirea cazului de egalitate se va acorda 1 punct. Ghicirea poate fi utilă la găsirea primei rescrieri.) 2p

□

Problema 2

Fie $n \geq 2$ un număr natural fixat. Pe un cerc se scriu cu albastru $k \geq 2$ numere, toate aparţinând mulţimii $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Numerele se pot repeta şi nu este obligatoriu ca pe cerc să apară toate elementele lui A. Între oricare două numere vecine scrise cu albastru se scrie cu roşu media loc aritmetică. Aflaţi cea mai mică valoare a lui k pentru care există o alegere a numerelor albastre care face ca printre numerele scrise cu roşu să figureze toate elementele mulţimii A.

Andrei Eckstein

Demonstraţie. Începem cu câteva observaţii evidente:
1. Pe tablă vom avea k numere roşii, deci trebuie să avem $k \geq n$.
2. Pentru ca pe tablă să apară un 1 roşu trebuie să avem doi de 1 albaşti vecini. La fel, pentru a avea un n roşu, trebuie să avem doi de n albaştri vecini.
3. Dacă n este par, trebuie să avem pe tablă şi numere albastre impare (măcar pe 1) şi numere albastre pare (măcar pe n). Vom avea cel puţin două perechi de numere albastre vecine formate din două numere de parităţi diferite, deci cel puţin două numere roşii neîntregi.
Conchidem că în cazul n par avem nevoie de cel puţin $n + 2$ numere albastre (pentru a obţine eventual n numere roşii întregi).
Vom arăta că, pentru n par, k minim este într-adevăr $n + 2$. Putem într-adevăr scrie cu albastru $n + 2$ numere în următoarea ordine:

$$1, 1, 3, 3, 5, 5, \ldots, n-3, n-3, n-1, n-1, n, n.$$

Mediile a câte doi vecini, începând de la perechea $1, 1$ şi terminând cu perechea $n, 1$ care închide cercul sunt: $1, 2, 3, \ldots n-3, n-2, n-1, n-\frac{1}{2}, n, \frac{n+1}{2}$, listă care face să apară toate elementele

lui A.
Dacă $n = 4m + 1$, $m \in \mathbb{N}^*$, putem scrie cu albstru $n = 4m + 1$ numere în următoarea ordine:

$$1, 1, 3, 3, \ldots, 2m - 1, 2m - 1, 2m + 1, 2m + 3, 2m + 3, \ldots, 4m - 1, 4m - 1, 4m + 1, 4m + 1.$$

Mediile a câte doi vecini, începând de la perechea $1, 1$ şi terminând cu perechea $4m + 1, 1$ care închide cercul, sunt:

$$1, 2, 3, \ldots, 2m - 1, 2m, 2m + 2, 2m + 3, \ldots, 4m - 1, 4m, 4m + 1, 2m + 1,$$

listă care face să apară toate elementele lui A.
Dacă $n = 4m + 3$, $m \in \mathbb{N}$, nu putem avea doar n numere albastre. Într-adevăr, dacă am avea $k = n$ numere albastre, pentru a obţine toate numerele de la 1 la n roşii, trebuie să nu avem numere roşii neîntregi, deci trebuie ca toate cele $k = n$ numere să fie de aceeaşi paritate. Având nevoie de perechea $1, 1$, toate cele k numere trebuie să fie impare, deci suma lor este impară. Dar suma numerelor albastre este egală cu suma numerelor roşii, iar suma numerelor roşii trebuie să fie $1 + 2 + \ldots + (4m + 3) = (4m + 3)(2m + 2)$, adică pară. Conchidem că nu putem avea numai n numere albastre, este nevoie de cel puţin $n + 1$. Exemplul de mai jos arată că în acest caz minimul este $n + 1$:
scriem cu albastru, în ordine, următoarele $n + 1$ numere:

$$1, 1, 3, 3, 5, 5, \ldots, n - 2, n - 2, n, n.$$

Mediile a câte doi vecini vor fi, începând de la perechea $1, 1$ şi terminând cu perechea $n, 1$ care închide cercul: $1, 2, 3, \ldots, n - 2, n - 1, n, \frac{n+1}{2}$, listă care face să apară toate elementele lui A.
În concluzie, răspunsul este: $k = n + 2$ dacă n este par, $k = n$ dacă n este de forma $4m + 1$ şi $k = n + 1$ dacă n este de forma $4m + 3$.

Barem:

- exemplu pentru n par .... $1p$
- exemplu pentru $n = 4m + 1$ .... $1p$
- exemplu pentru $n = 4k + 3$ .... $1p$
- dacă n este par, avem minim două numere roşii neîntregi .... $1p$
- suma numerelor roşii este cât cea a numerelor albastre .... $1p$
- în cazul $n = 4m + 3$ nu putem avea numai n numere albastre .... $1p$
- finalizare .... $1p$

□

Problema 3

Determinaţi tripletele (a, b, c) de numere naturale nenule care au proprietatea că $c.m.m.d.c.(a, b, c) = 1$ şi $a + b + c$ divide $a^n + b^n + c^n$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Olimpiadă Canada, 2005

Demonstrație. Cum $a+b+c>1$, el are cel puţin un divizor prim. Fie p un divizor prim al lui $a+b+c$. Conform micii teoreme a lui Fermat, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ sau $a^{p-1} \equiv 0 \pmod p$ după cum $a \nmid p$, respectiv $a \mid p$. La fel şi pentru b^{p-1} şi c^{p-1}. Cum p nu poate divide fiecare din numerele a, b, c, avem că $a^{p-1}+b^{p-1}+c^{p-1} \equiv 1, 2, 3 \pmod p$. Pe de altă parte, cum p divide $a+b+c$, iar $a+b+c$ divide $a^{p-1}+b^{p-1}+c^{p-1}$, deducem că $p \in \{2, 3\}$. Aşadar, $a+b+c$ trebuie să fie un număr de forma $2^k \cdot 3^j$, cu $k, j \in \mathbb{N}$.
Deoarece a, b, c nu pot fi toate pare, vom avea $a^2+b^2+c^2 \equiv 1, 2, 3 \pmod 4$, deci $a+b+c$ nu poate fi divizibil cu 4. Aşadar, $k \in \{0, 1\}$.
Se ştie că un cub poate fi congruent numai cu -1, 0 sau 1 modulo 9, deci $a^6 \equiv 0, 1 \pmod 9$. Dar a, b, c nu pot fi toate trei divizibile cu 3, deci avem că $a^6+b^6+c^6 \equiv 1, 2, 3 \pmod 9$, deci $a+b+c$ nu poate fi divizibil cu 9. Aşadar, $j \in \{0, 1\}$.
Prin urmare, $a+b+c \in \{1, 2, 3, 6\}$. Dar $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, deci numerele pot fi $a=b=c=1$, $\{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}$ sau $1, 1, 4$ într-o anumită ordine.
Este evident că $1+1+1$ divide $1^n+1^n+1^n$ pentru orice n şi uşor de verificat că $1+1+4$ divide $1^n+1^n+4^n$ pentru orice n. În schimb, $1+2+3$ nu divide $1^2+2^2+3^2$, deci cazurile cu $\{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}$ nu convin.
Soluţiile sunt: $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 4)$, $(1, 4, 1)$ şi $(4, 1, 1)$.

Barem:

- singurii divizori primi ai lui $a+b+c$ pot fi 2 şi 3 . . . . $3p$
- $a+b+c$ nu e divizibil cu 4 . . . . $1p$
- $a+b+c$ nu e divizibil cu 9 . . . . $2p$
- finalizare . . . . $1p$

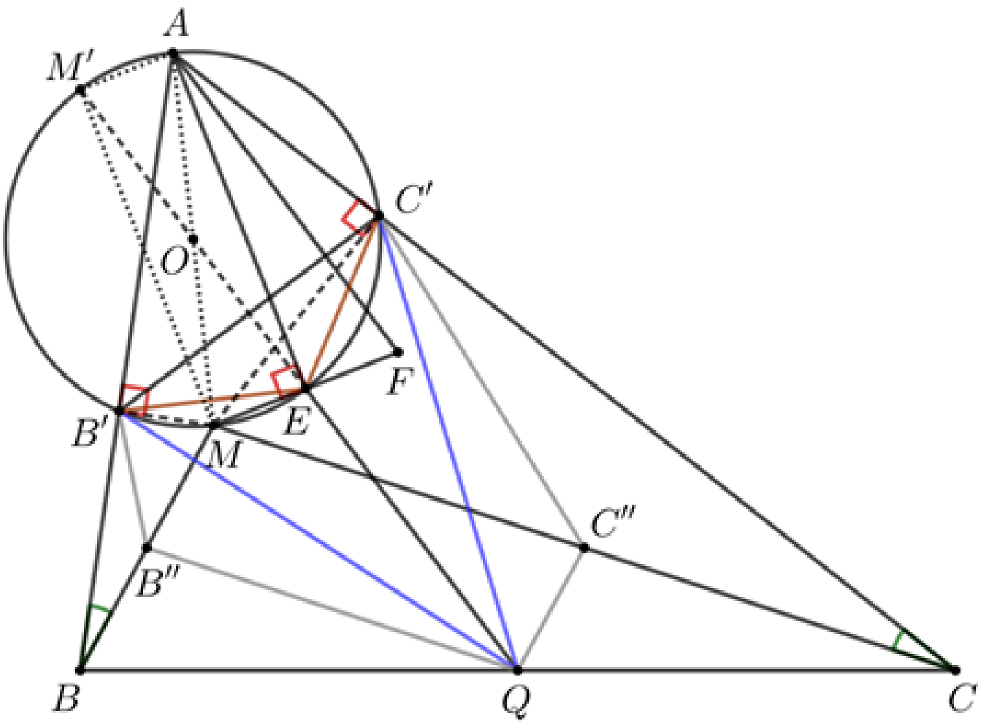
$\square$

Problema 4

Fie ABC un triunghi neisoscel, M un punct în interiorul său astfel încât $\sphericalangle ABM = \sphericalangle ACM$, E proiecţia lui M pe bisectoarea interioară a unghiului A, F simetricul lui M faţă de E şi Q mijlocul lui $[BC]$.
a) Arătaţi că $EQ \parallel AF$.
b) Demonstraţi că punctele Q, E şi proiecţia lui M pe bisectoarea exterioară a unghiului A sunt coliniare.

Dan-Ştefan Marinescu şi *Ciprian Demeter*, Concursul „Nicolae Coculescu”, Slatina, 2009

Demonstrație. a) Fie B' şi C' proiecţiile lui M pe laturile AB, respectiv AC. Atunci punctele B', C' şi E se află pe cercul de diametru $[AM]$. În plus, cum $(AE$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle B'AC'$, avem că $EB' = EC'$. Dacă notăm B'' şi C'' mijloacele segmentelor $[MB]$, respectiv $[MC]$, se arată uşor că triunghiurile $QB'B''$ şi $C'QC''$ sunt congruente (LUL). Obţinem că $QB' = QC'$, deci Q şi E se află pe mediatoarea lui $[B'C']$. Aşadar, $QE \perp B'C'$. Pe de altă parte, centrul cercului circumscris triunghiului $AB'C'$ se află pe semidreapta $(AM$, deci ortocentrul se află pe izogonala acesteia, adică pe $(AF$. Deducem că $AF \perp B'C'$ şi, deci, că $AF \parallel QE$.
b) Dacă M' este proiecţia lui M pe bisectoarea exterioară a unghiului A, avem că $\sphericalangle M'AE = \sphericalangle MM'A = \sphericalangle MEA = 90°$, deci $MM'AE$ este dreptunghi. Atunci AM' este paralel şi egal cu ME, deci şi cu EF. Aşadar, $M'AFE$ este paralelogram. Rezultă că $M'E \parallel AF$, deci M', E şi Q sunt coliniare.



Barem:

- arată că $EB' = EC'$ . . . 1p
- arată că $QB' = QC'$ . . . 2p
- deduce că $QE \perp B'C'$ . . . 1p
- finalizarea punctului a) . . . 1p
- demonstrarea cerinţei de la b) . . . 2p

□

Timp de lucru: 240 de minute.
Pentru fiecare problemă se acordă maxim 7 puncte.
Nu este permisă utilizarea calculatorului sau a oricărui alt instrument, cu excepția riglei și a compasului.