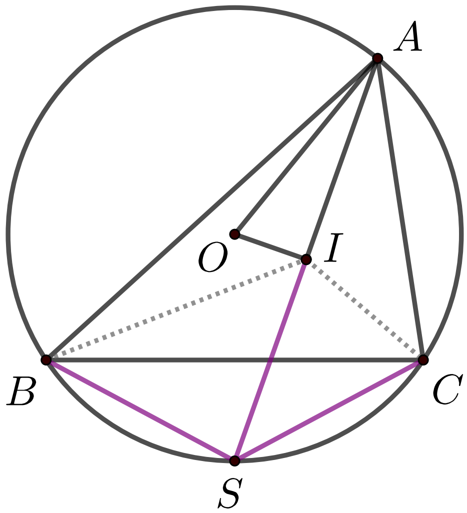
Problema săptămânii 397

Fie ABC un triunghi în care $AB + AC = 2BC$. Dacă I şi O sunt centrul cercul înscris, respectiv centrul cercului circumscris triunghiului ABC, arătaţi că triunghiul AIO este dreptunghic.

Đang Nguyễn, (Romantics of Geometry)

Soluţie: Dacă $(AI$ intersectează cercul circumscris în punctul S, din Incenter-Excenter Lemma rezultă că $SB = SC = SI$. Scriind relaţia lui Ptolemeu pentru patrulaterul inscriptibil $ABSC$ obţinem $AB \cdot SC + AC \cdot SB = BC \cdot SA$, deci $BC \cdot SA = SI(AB + AC) = SI \cdot 2BC$, de unde rezultă că $SA = 2SI$, adică I este mijlocul lui $[AS]$. Atunci OI este perpendiculară pe coarda $[SA]$, deci unghiul $\sphericalangle AIO$ este drept.



Am primit soluţii de la: *Titu Zvonaru, Daniel Văcaru, Gheorghe Iurea, Eric-Dimitrie Cismaru* şi *Robert Isepciuc.*

Problem of the week no. 397

Let ABC be a triangle whose side lengths satisfy $AB + AC = 2BC$. If I and O are the incenter and the circumcenter of triangle ABC, prove that triangle AIO is right-angled.

Đang Nguyễn, (Romantics of Geometry)

Solution: If $(AI$ intersects the circumcircle at S, from the Incenter-Excenter Lemma it follows that $SB = SC = SI$. Writing Ptolemys relation for the cyclic quadrilateral $ABSC$ we get $AB \cdot SC + AC \cdot SB = BC \cdot SA$, i.e. $BC \cdot SA = SI(AB + AC) = SI \cdot 2BC$. It follows that $SA = 2SI$, i.e. I is the midpoint of $[AS]$. Then OI is perpendicular to the chord $[SA]$, i.e. angle $\sphericalangle AIO$ is right.