Problema săptămânii 396

O mulţime de numere reale nenule se numeşte *regulată* dacă, scriind elementele mulţimii în ordine crescătoare, diferenţa dintre oricare două numere vecine este mereu aceeaşi. De exemplu, mulţimea $\{4, 18, -3, 11\}$ este regulată deoarece, dacă îi scriem elementele în ordine crescătoare, -3, 4, 11, 18, avem $18 - 11 = 11 - 4 = 4 - (-3)$.
O mulţime A de numere reale nenule se numeşte *super-regulată* dacă este regulată şi şi mulţimea formată din inversele elementelor lui A este tot o mulţime regulată.
(Inversul lui x este $\frac{1}{x}$.)
Care este cel mai mare număr de elemente pe care îl poate avea o mulţime super-regulată?

Cupa Animath, Franţa, 2023

Soluţie: O problemă tipică *evaluare-exemplu.*
Evaluarea. Vom arăta mai întâi că o mulţime super-regulată poate avea cel mult două elemente pozitive şi cel mult două elemente negative, deci cel mult 4 elemente.
Presupunând că a, b, c, cu $0 < a < b < c$, sunt elemente ale unei mulţimi super-regulate, avem $0 < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$, deci trebuie ca $2b = a + c$ şi $\dfrac{2}{b} = \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{a}$. Obţinem $(a + c)^2 = 4ac$, sau $(a - c)^2 = 0$, deci $a = c$, ceea ce contrazice $0 < a < b < c$. Aşadar, o mulţime super-regulată poate conţine cel mult două elemente pozitive. Analog se arată că o mulţime super-regulată poate conţine cel mult două elemente negative.

Exemplul: Mulţimea $\{-3, -1, 1, 3\}$ este o mulţime super-regulată deoarece:
$3 - 1 = 1 - (-1) = -1 - (-3) = 2$, iar inversele acestor numere sunt
$-1 < -\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{3} < 1$ şi verifică $1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3} - \left(-\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{1}{3} - (-1) = \dfrac{2}{3}$.

Remarcă: (bazată pe rezolvarea lui *Titu Zvonaru*)
Cum găsim un exemplu de mulţime super-regulată?
Căutăm o mulţime super-regulată $\{a, b, c, d\}$ cu $a < b < 0 < c < d$. Vom avea atunci $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a} < 0 < \dfrac{1}{d} < \dfrac{1}{c}$, iar aceste numere trebuie să verifice $2b = a + c$, $2c = b + d$, $\dfrac{2}{a} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{d}$ şi $\dfrac{2}{d} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c}$. Rezultă că $\dfrac{2}{a} = \dfrac{b + d}{bc} = \dfrac{2c}{bd}$, deci $ac = bd$.
Înlocuind $a = 2b - c$ şi $d = 2c - b$ în această ultimă relaţie obţinem $b^2 = c^2$, deci $c = -b$.
Înlocuind în $ac = bd$, rezultă că $d = -a$. În fine, din $a = 2b - c = -3c$ obţinem că mulţimile super-regulate de 4 elemente sunt cele de forma $\left\{a, \dfrac{a}{3}, -\dfrac{a}{3}, -a\right\}$, unde $a < 0$ este arbitrar.

Am primit soluţii de la: *Gheorghe Iurea, Maria Ciucu, Robert Isepciuc* şi *Titu Zvonaru.*

Problem of the week no. 396

A set of non-zero real numbers is called *regular* if, after arranging its elements in increasing order, the difference between any two neighboring numbers is the same. For example, the set $\{4, 18, -3, 11\}$ is regular because, if we write its elements in increasing order, -3, 4, 11, 18, we have $18 - 11 = 11 - 4 = 4 - (-3)$.
A set A of non-zero real numbers is called *super-regular* if it is regular and the set consisting of the inverses of the elements of A is also a regular set.
(The inverse of x is $\frac{1}{x}$.)
What is the largest number of elements a super-regular set may have?

Animath Cup, France, 2023

Solution: O problem of the type *evaluate, then give an example.*
Evaluation. First, we show that a super-regular set can have at most two positive elements and at most two negatives ones, hence at most 4 elements altogether.
Assuming that a, b, c, with $0 < a < b < c$, are elements of a super-regular set, we have $0 < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$, therefore the following conditions must be satisfied: $2b = a + c$ and $\dfrac{2}{b} = \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{a}$. We obtain $(a + c)^2 = 4ac$, i.e. $(a - c)^2 = 0$, hence $a = c$, contradicting $0 < a < b < c$. We conclude that a super-regular set can have at most two positive elements. One proves similarly that a super-regular set can have at most two negative elements.

Example: The set $\{-3, -1, 1, 3\}$ is super-regular because:
$3 - 1 = 1 - (-1) = -1 - (-3) = 2$, and their inverses are
$-1 < -\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{3} < 1$ and satisfy $1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3} - \left(-\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{1}{3} - (-1) = \dfrac{2}{3}$.