Problema săptămânii 395

Determinaţi numerele naturale x şi y pentru care $7^x - 3^y = 4$.

Olimpiadă India, 1995

Soluţie: (*Titu Zvonaru*)
Dacă $y = 1$ obținem $x = 1$. Presupunem că $y \geq 2$.
Ecuația se scrie $7(7^{x-1} - 1) = 3(3^{y-1} - 1)$.   (1)
Deducem că $3^{y-1} - 1$ trebuie să se dividă cu 7. Calculând din aproape în aproape puterile lui 3 modulo 7 obținem $3, 2, 6, 4, 5, 1$. Rezultă că $y-1$ este divizibil cu 6; dacă $y - 1 = 6b$, ecuația (1) devine $7(7^{x-1} - 1) = 3(3^{6b} - 1)$.   (2)
Deoarece $3^{6b} - 1$ se divide cu $3^6 - 1 = 2^3 \cdot 7 \cdot 13$, trebuie ca $7^{x-1} - 1$ să se dividă cu 13. Procedând ca mai sus, puterile lui 7 modulo 13 sunt $7, 10, 5, 9, 11, 12, 6, 3, 8, 4, 2, 1$.
Rezultă că $x - 1 = 12a$, iar ecuația (2) se scrie $7(7^{12a} - 1) = 3(3^{6b} - 1)$.   (3)
Cum $7^{12a} - 1$ se divide cu $7^3 - 1 = 342 = 9 \cdot 38$, din relația (3) deducem că $3(3^{6b} - 1)$ se divide cu 9, imposibil.
Rezultă că singura soluție este $(x, y) = (1, 1)$.

Am primit soluţii de la: *Titu Zvonaru, Gheorghe Iurea* şi *Eric-Dimitrie Cismaru.*

Problem of the week no. 395

Find all positive integers x, y such that $7^x - 3^y = 4$.

India, 1995

Solution: (*Titu Zvonaru*)
If $y = 1$ we obtain $x = 1$. Assume that $y \geq 2$.
We rewrite the equation as $7(7^{x-1} - 1) = 3(3^{y-1} - 1)$.   (1)
It follows that $3^{y-1} - 1$ must be divisible by 7. Computing the powers of 3 modulo 7 we obtain $3, 2, 6, 4, 5, 1$. It follows that $y - 1$ must be divisible by 6; if $y - 1 = 6b$, equation (1) becomes $7(7^{x-1} - 1) = 3(3^{6b} - 1)$.   (2)
As $3^{6b} - 1$ is divisible by $3^6 - 1 = 2^3 \cdot 7 \cdot 13$, $7^{x-1} - 1$ needs to be a multiple of 13. The powers of 7 modulo 13 are $7, 10, 5, 9, 11, 12, 6, 3, 8, 4, 2, 1$. It follows that $x - 1 = 12a$, and equation (2) becomes $7(7^{12a} - 1) = 3(3^{6b} - 1)$.   (3)
As $7^{12a} - 1$ is divisible by $7^3 - 1 = 342 = 9 \cdot 38$, from (3) it follows that $3(3^{6b} - 1)$ is divisible by 9, which is not true.
Therefore the only solution of the equation is $(x, y) = (1, 1)$.