Problema săptămânii 397

Fie ABC un triunghi în care $AB + AC = 2BC$. Dacă I și O sunt centrul cercului înscris, respectiv centrul cercului circumscris triunghiului ABC, arătați că triunghiul AIO este dreptunghic.

Soluții:

I. Cu notațiile obișnuite într-un triunghi, avem

$$AO = R, AI = \frac{bc\cos\frac{A}{2}}{p}, IO^2 = R^2 - 2Rr.$$

Deoarece $AO > IO$, nu putem avea $AI \perp AO$. Folosind formula $abc = 4pRr$, obținem

$$AI^2 + IO^2 = AO^2 \Leftrightarrow \frac{bc(p-a)}{p} + R^2 - 2Rr = R^2 \Leftrightarrow bc(p-a) = 2pRr \Leftrightarrow 2bc(p-a) = abc$$
$$\Leftrightarrow b + c - a = a \Leftrightarrow b + c = 2a.$$

II. Notăm cu M punctul de intersecție a bisectoarei AI cu cercul circumscris. Știm că $MB = MI = MC$. Aplicând teorema lui Ptolemeu obținem

$$AB \cdot MC + AC \cdot MB = AM \cdot BC \Longrightarrow MI(b+c) = a(AI + MI) \Longrightarrow 2MI = AI + MI \Longrightarrow AI = IM.$$

Rezultă că în OI este mediană în triunghiul isoscel AOM, deci $OI \perp AI$.

III. Fie AD bisectoarea din A și N mijlocul laturii AC. Avem

$$AI \cdot AD = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c} \cdot \frac{bc\cos\frac{A}{2}}{p} = \frac{2b^2c^2p(p-a)}{bcp(b+c)} = \frac{bc}{2} = AN \cdot AB,$$

deci $\frac{AN}{AD} = \frac{AI}{AB}$. Deoarece $< BAD =< IAN$, rezultă că triunghiurile ABD și AIN sunt asemenea. Atunci $< AIN = B =< AON$, adică patrulaterul $AION$ este inscriptibil. Obținem $< AIO = 180° - < ONA = 90°$.