28500. *Fie $n \geqslant 4$ un număr natural. Pentru fiecare mulțime finită de numere naturale A notăm cu $n(A)$ numărul submulțimilor sale nevide ce au suma elementelor divizibilă cu n. Determinați cea mai mică și cea mai mare valoare pe care o poate lua $n(A)$, când A parcurge familia mulțimilor de $n+1$ numere naturale, nu toate divizibile cu n.*

Cristi Săvescu, Focșani

Soluție. Spunem că o submulțime $X \subset A$ este *bună* dacă suma elementelor sale este divizibilă cu n. Vom demonstra că $\max n(A) = 2^n - 1$ și $\min n(A) = 3$.

Mulțimea $A' = \{n, 2n, \ldots, n^2, n^2+1\}$ are proprietatea că $n(A') = 2^n - 1$, deoarece $A' \setminus \{n^2+1\}$ are n elemente divizibile cu n, deci orice submulțime nevidă a sa este bună, iar orice submulțime a lui A' care îl conține pe n^2+1 nu are suma elementelor divizibilă cu n.

Presupunem, prin absurd, că există A cu $n(A) > 2^n - 1$. Fie $a \in A$ oarecare. Grupăm submulțimile nevide ale lui A și diferite de $\{a\}$ în $2^n - 1$ perechi de forma $(T, T \cup \{a\})$, unde T parcurge toate submulțimile nevide ale lui $A \setminus \{a\}$. Din principiul cutiei rezultă că există o pereche în care ambele mulțimi au suma elementelor divizibilă cu n, deci n divide a. Cum a a fost ales arbitrar, rezultă că n divide toate elementele lui A, fals. Rezultă $n(A) \leqslant 2^n - 1$.

Mulțimea $A'' = \{n+1, 2n+1, \ldots, n^2+1, n^3\}$ verifică $n(A'') = 3$ pentru că submulțimile A'', $\{n^3\}$ și $A'' \setminus \{n^3\}$ sunt bune, iar orice altă submulțime a sa este o submulțime proprie a mulțimii $\{n+1, 2n+1, \ldots, n^2+1\}$, eventual reunită cu $\{n^3\}$, deci suma elementelor sale nu este divizibilă cu n.

Arătăm că $n(A) \geqslant 2$. Fie $A = \{a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1}\}$. Notăm $A_0 = \varnothing$, $A_k = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, $s_0 = 0$ și $s_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, pentru fiecare $k \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$.

Numerele $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{n+1}$, care sunt în număr de $n+2$, dau n resturi posibile la împărțirea cu n, și anume $0, 1, \ldots, n-1$. Din principiul cutiei, fie există $i < j < k$ pentru care $s_i \equiv s_j \equiv s_k \pmod{n}$ și atunci submulțimile $A_j \setminus A_i$ și $A_k \setminus A_j$ sunt bune, fie există patru indici diferiți $i < j, k < l$ pentru care $s_i \equiv s_j \not\equiv s_k \equiv s_l$ (mod n) și atunci submulțimile $A_j \setminus A_i$ și $A_l \setminus A_k$ sunt bune. Rezultă $n(A) \geqslant 2$.

Presupunem că $n(A) = 2$ și fie $P, R \subset A$ cele două submulțimi bune. Din modul de alegere descris în paragraful precedent, observăm că P și R conțin elemente consecutive din șirul $(a_k)_{1 \leqslant k \leqslant n+1}$. Dacă $P \subset R$, atunci submulțimea $R \setminus P$ este bună, prin urmare $n(A) > 2$, fals. Similar pentru $R \subset P$. Dacă $P \cap R = \emptyset$, atunci submulțimea $P \cup R$ este bună, adică din nou obținem $n(A) > 2$, fals. Deducem că $P \cap R, P \setminus R$ și $R \setminus P$ sunt nevide, deci $|P| \geqslant 2$ și $|R| \geqslant 2$.

Considerăm acum mulțimile $T_0 = \{a_1\}$, $T_1 = \{a_1, a_3\}$, $T_2 = \{a_1, a_3, a_5\}$, ..., $T_{[\frac{n}{2}]} = \{a_1, a_3, \ldots, a_{2[\frac{n}{2}]+1}\}$, apoi $T_{[\frac{n}{2}]+1} = \{a_1, a_3, \ldots, a_{2[\frac{n}{2}]+1}, a_2\}$, $T_{[\frac{n}{2}]+2} = \{a_1, a_3, \ldots, a_{2[\frac{n}{2}]+1}, a_2, a_4\}$, etc. Fie $t_0, t_1, \ldots, t_n$ suma elementelor acestor mulțimi. Atunci două dintre ele (t_i și t_j, $i < j$) vor fi congruente modulo n. Rezultă că $T_j \setminus T_i$ are suma elementelor divizibilă cu n, deci $T_j \setminus T_i = P$ sau $T_j \setminus T_i = R$. Observăm că elementele din $T_j \setminus T_i$ nu sunt alăturate în șirul $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n+1}$ și astfel ajungem la o contradicție. În concluzie, avem $n(A) \geqslant 3$.