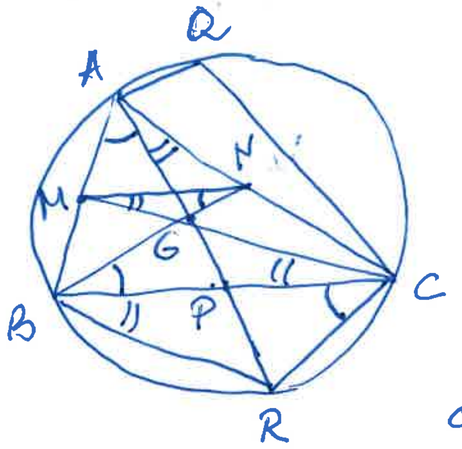
Problema 393

Soluție (Ikrea Gheorghe)



Considerăm P mijlocul laturii BC, R intersecția dreptei AG cu cercul circumscris ΔABC (diferit de A) și Q intersecția perpendicularei în A pe AG cu cercul circumscris ΔABC (diferit de A)

Concluzia problemei rezultă dacă arătăm că $QG \perp BC$.

Deoarece $\widehat{MAG} = \widehat{MNG}$ (AMGN inscriptibil); $\widehat{MNB} = \widehat{NBC}$ ($MN \parallel BC$) și $\widehat{MAG} = \widehat{BCR}$, deducem $\widehat{NBC} = \widehat{BCR}$, deci $BN \parallel RC$. Similar $CM \parallel BR$. Deducem că patrulaterul BRCG este paralelogram. Rezultă că $GR = 2GP = AG$, astfel G este mijlocul segmentului AR.

Cum $\widehat{QAR} = 90°$ rezultă că QR este diametru al cercului circumscris ΔABC, de aici $\widehat{QCR} = 90°$

Din $BG \parallel CR$ și $RC \perp QC$ deducem $BG \perp QC$, deci BG este înălțime în ΔQBC. La fel arătăm că $CG \perp BQ$, deci CG este înălțime în ΔQBC și apoi

Astfel G este ortocentrul ΔQBC și $QG \perp BC$, ceea ce trebuia arătat.

Notă. 1. Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor ΔABC, patrulaterul AMGN este inscriptibil dacă și numai dacă $2a^2 = b^2 + c^2$.

Soluție: AMGN este inscriptibil $\Leftrightarrow$

$\Delta PCG \sim \Delta PAC \Leftrightarrow \dfrac{PC}{AP} = \dfrac{GP}{PC} = \dfrac{CG}{AC} \Leftrightarrow$

$$\frac{\frac{a}{2}}{m_a} = \frac{\frac{1}{3}m_a}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{2}{3}m_c}{b} \Leftrightarrow 4m_a^2 = 3a^2 \text{ și } m_a b = m_c \cdot a$$

Dar $4m_a^2 = 3a^2 \Leftrightarrow 2(b^2+c^2) - a^2 = 3a^2 \Leftrightarrow b^2+c^2 = 2a^2$ și

$m_a b = m_c a \Leftrightarrow m_a^2 b^2 = m_c^2 a^2 \Leftrightarrow (2b^2+2c^2-a^2)b^2 = (2a^2+2b^2-c^2)a^2$

$\Leftrightarrow (a^2+2b^2)(2a^2-b^2-c^2) = 0 \Leftrightarrow 2a^2 = b^2+c^2$.

Rezultă concluzia.

2. Dacă AMGN este inscriptibil, atunci $m_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $m_b = \frac{c\sqrt{3}}{2}$; $m_c = \frac{b\sqrt{3}}{2}$.

Sol. AMGN inscriptibil $\Rightarrow 2a^2 = b^2+c^2$ și de aici concluzia.

3. În ΔABC; $c m_b + b m_c = 2a m_a \Leftrightarrow b^2+c^2 = 2a^2$

Sol. AMGN inscriptibil $\Leftrightarrow b^2+c^2 = 2a^2$ și

AMGN inscriptibil $\Leftrightarrow AM \cdot GN + AN \cdot MG = AG \cdot MN$

$\Leftrightarrow c m_b + b m_c = 2a m_a$ și apoi concluzia.