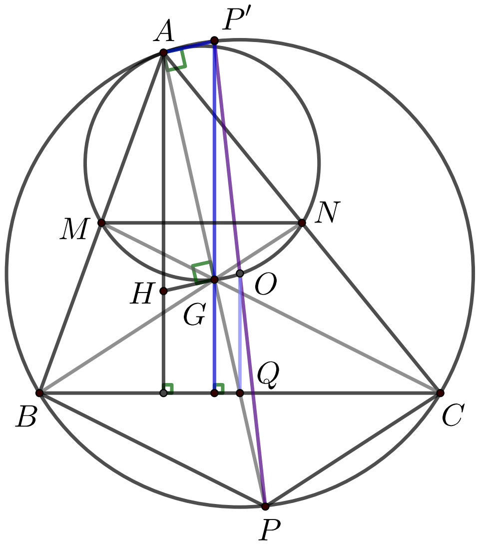
Problema săptămânii 393

Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC, iar M şi N mijloacele laturilor AB, respectiv AC. Arătaţi că dacă punctele A, G, M şi N sunt conciclice, atunci perpendiculara în A pe AG şi perpendiculara din G pe BC se intersectează pe cercul circumscris triunghiului ABC.

baraj pentru EGMO, Japonia, 2024

Soluţia 1: Fie P simetricul lui A faţă de G. Cum MG şi NG sunt linii mijlocii în triunghiurile ABP, respectiv ACP, avem $\sphericalangle APB = \sphericalangle AGM$ şi $\sphericalangle APC = \sphericalangle AGN$, deci $\sphericalangle BPC = \sphericalangle APB + \sphericalangle APC = \sphericalangle AGM + \sphericalangle AGN = \sphericalangle MGN = 180^\circ - \sphericalangle BAC$, ceea ce arată că patrulaterul $ABPC$ este inscriptibil. (Mai rapid: omotetia directă de centru A şi raport 2 duce patrulaterul $AMGN$ în patrulaterul $ABPC$. Cum primul este inscriptibil, şi cel de-al doilea este inscriptibil.) Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC, Q mijlocul laturii BC şi P' simetricul lui P faţă de O (punctul diametral opus lui O pe cercul circumscris). Atunci OQ este linie mijlocie în triunghiul PGP' şi, cum $OQ \perp BC$, rezultă $GP' \perp BC$. Avem şi $\sphericalangle GAP' = 90^\circ$ (pentru că $[PP']$ este diametru), deci perpendiculara în A pe AG şi perpendiculara din G pe BC se intersectează în punctul P' situat pe cercul circumscris triunghiului ABC, de unde concluzia.



Soluţia 2: (*Maria Ciucu*)

Deoarece $AMGN$ este inscriptibil, iar $MN \parallel BC$, avem $\sphericalangle MAG = \sphericalangle MNG = \sphericalangle NBC$ şi $\sphericalangle NAG = \sphericalangle NMG = \sphericalangle MCB$, ceea ce arată că G este punctul A-Humpty (vezi articolul lui Kapil Pause, On two special points in triangle). Deducem că $HG \perp AG$. Fie Q mijlocul lui BC, $\{P\}$ intersecţia lui $(AG$ cu cercul circumscris triunghiului ABC şi P' simetricul lui P faţă de O, centrul cercului circumscris. Cum $\sphericalangle GBC = \sphericalangle BAP = \sphericalangle BCP$ şi $\sphericalangle GCB = \sphericalangle CAP = \sphericalangle CBP$, rezultă că $GBPC$ este paralelogram. Atunci OQ este linie mijlocie în triunghiul $PP'G$, deci $P'G = 2OQ$. Dar se ştie că şi $AH = 2OQ$, deci $[AH]$ şi $[P'G]$ sunt paralele şi congruente. Aşadar $AHGP'$ este paralelogram, deci $AP' \parallel GH$, adică $AP' \perp AG$ şi $P'G \perp BC$, de unde concluzia.

Am primit soluţii de la: *Robert Isepciuc, Gheorghe Iurea, Maria Ciucu* şi *Ioana Vlădoiu.*

Problem of the week no. 393

Let ABC be a triangle with centroid G. Let M and N be the midpoints of the sides AB and AC, respectively. Prove that if A, G, M, and N are concyclic, then the line through A perpendicular to line AG and the line through G perpendicular to line BC intersect on the circumcircle of triangle ABC.

EGMO Test, Japan, 2024

Solution: Let P be the reflection of A across G. As MG and NG are midlines in triangles ABP and ACP, respectively, we have $\sphericalangle APB = \sphericalangle AGM$ and $\sphericalangle APC = \sphericalangle AGN$, hence $\sphericalangle BPC = \sphericalangle APB + \sphericalangle APC = \sphericalangle AGM + \sphericalangle AGN = \sphericalangle MGN = 180° - \sphericalangle BAC$, which shows that $ABPC$ is cyclic. (Faster: the homothety centered at A with ratio 2 maps $AMGN$ into $ABPC$. The first one is cyclic, therefore so is the latter one.) Let O be the circumcenter of ABC, Q the midpoint of BC and P' the antipode of P in the circumcircle. Then OQ is a midline in triangle PGP' and, as $OQ \perp BC$, it follows that $GP' \perp BC$. We also have $\sphericalangle GAP' = 90°$ (because $[PP']$ is a diameter), therefore the line through A perpendicular to AG and the line through G perpendicular to BC intersect at P' which does indeed belong to the circumcircle of ABC.