Problema săptămânii 392

Fie $n \geq 4$ un număr natural. Pentru fiecare mulţime finită de numere naturale A notăm cu $n(A)$ numărul submulţimilor sale nevide care au suma elementelor divizibilă cu n. Determinaţi cea mai mică şi cea mai mare valoare pe care o poate lua $n(A)$, atunci când A parcurge familia mulţimilor de $n+1$ numere naturale, nu toate divizibile cu n.

Cristi Săvescu, GM nr. 1/2023

Soluţie:
Valoarea minimă a lui $n(A)$ este 3.
Vom folosi următoarea Lemă:

Din orice n numere naturale se pot alege câteva (minim unul) cu suma divizibilă cu n.
Demonstratia lemei:
Dacă numerele sunt $x_1, x_2, \ldots, x_n$, considerăm sumele:

$$x_1,\ x_1 + x_2,\ x_1 + x_2 + x_3,\ \ldots\ ,\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Sunt n sume. Dacă vreuna dintre ele este divizibilă cu n, am găsit câteva numere dintre cele date care au suma divizibilă cu n. Dacă niciuna dintre sume nu este divizibilă cu n, atunci cele n sume dau n resturi nenule la împărţirea cu n. Dar există doar $n-1$ resturi nenule la împărţirea cu n, deci, din principiul cutiei, există două sume care dau acelaşi rest la împărţirea cu n. Dacă $x_1 + x_2 + \ldots + x_i$ şi $x_1 + x_2 + \ldots + x_j$, cu $i < j$, dau acelaşi rest, atunci diferenţa lor, $x_{i+1} + \ldots + x_j$ este divizibilă cu n, deci iarăşi am găsit câteva elemente (minim unul) cu suma divizibilă cu n.

Dacă $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$, atunci printre elementele $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ pot găsi câteva cu suma divizibilă cu n, adică găsesc o submulţime nevidă a lui $\{a_1, \ldots, a_n\}$ cu suma elementelor divizibilă cu n. Dacă b este unul din elementele acelei submulţimi, mă uit la cele n elemente rămase în A după înlăturarea elementului b. Există în această mulţime o submulţime nevidă cu suma elementelor divizibilă cu n. Deoarece ea nu-l conţine pe b, această submulţime este diferită de cea a lui $\{a_1, \ldots, a_n\}$ găsită deja. Avem două submulţimi. Dacă sunt disjuncte, putem lua reuniunea. Suma elementelor reuniunii va fi tot divizibilă cu n. Dacă nu sunt disjuncte ci au un element comun c, ne uităm la cele n elemente rămase în A după îndepărtarea lui c. În această mulţime găsim câteva elemente cu suma divizibilă cu n, adică o a treia submulţime nevidă a lui A (diferită de primele două) care are suma elementelor divizibilă cu n.

Aşadar, în orice mulţime cu $n+1$ elemente găsesc cel puţin 3 submulţimi nevide cu suma elementelor divizibilă cu n, adică avem mereu $n(A) \geq 3$.
Să arătăm că acest minim chiar se atinge, adică există o mulţime cu $n+1$ elemente care are exact 3 submulţimi cu suma elementelor divizibilă cu n.
Putem lua $A = \{0, n\} \cup \{1, n+1, 2n+1, 3n+1, \ldots, (n-2)n+1\}$. Avem două elemente congruente cu 0 (mod n) şi $n-1$ elemente congruente cu 1 (mod n). Oricâte elemente congruente cu 1 am lua, suma lor nu va fi divizibilă cu n. Singurele submulţimi nevide

cu suma elementelor divizibilă cu n sunt $\{0\}$, $\{n\}$ şi $\{0, n\}$.

Aşadar $\min n(A) = 3$.

Valoarea maximă a lui $n(A)$ este $2^n - 1$. Ştim că în A există (cel puţin) un element nedivizibil cu n. Fie b un astfel de element, iar $A = \{b, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Printre submulţimile lui A (incluzând-o şi pe cea vidă) există două tipuri de submulţimi: cele care îl conţin pe b şi cele care nu-l conţin. Fiecărei submulţimi S a lui $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ (care nu-l conţine pe b) îi corespunde submulţimea $S \cup \{b\}$ care îl conţine pe b. În total sunt 2^{n+1} submulţimi, deci 2^n perechi disjuncte de forma $(S, S \cup \{b\})$. Nu se poate ca ambele submulţimi dintr-o pereche să aibă suma elementelor divizibilă cu n (pentru că ar rezulta că $n \mid b$, fals). Deci cel mult 2^n submulţimi pot avea suma elementelor divizibilă cu n. Dar dacă ne uităm la perechea formată din mulţimea vidă şi $\{b\}$, acolo mulţimea vidă este cea cu suma elementelor divizibilă cu n, ori ea nu convine. Aşadar, putem avea cel mult $2^n - 1$ submulţimi nevide cu suma elementelor divizibilă cu n.

Ne rămâne să dăm un exemplu de mulţime A pentru care $n(A) = 2^n - 1$. Considerăm $A = \{1\} \cup \{n, 2n, 3n, \ldots, n^2\}$. Submulţimile nevide ale lui A care au suma elementelor divizibilă cu n sunt submulţimile nevide ale lui $\{n, 2n, \ldots, n^2\}$, ori acestea sunt în număr de $2^n - 1$.

Aşadar $\max n(A) = 2^n - 1$.

Puteţi vedea şi soluţia apărută în GM nr. 6-7-8/2023.

Am primit soluţie numai de la *Robert Isepciuc.*

Problem of the week no. 392

Let $n \geq 4$ be a positive integer. For a finite set of positive integers A we denote by $n(A)$ the number of its non-empty subsets for which the sum of their elements is a multiple of n. Determine the smallest and the largest possible value of $n(A)$, when A has $n+1$ elements, not all multiples of n.

Cristi Săvescu, Gazeta Matematică no. 1/2023

Solution:
The minimum value of $n(A)$ is 3.
We use the following Lemma:

From any n integers, one can choose some (at least one) such that the sum of the chosen numbers is a multiple of n.
Proof of the Lemma:
If the numbers are $x_1, x_2, \ldots, x_n$, we consider the following n sums:

$$x_1,\ x_1 + x_2,\ x_1 + x_2 + x_3,\ \ldots,\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

If any of these sums is a multiple of n, we are done. If none of these sums is a multiple of n, then these n sums give n non-zero remainders when divided by n. As there are only $n-1$ non-zero remainders upon division by n, by the Pigeonhole Principle, among the sums there must be two that give the same remainder when divided by n. If $x_1 + x_2 + \ldots + x_i$ and $x_1 + x_2 + \ldots + x_j$, cu $i < j$, give the same remainder, their difference, $x_{i+1} + \ldots + x_j$, is also a multiple of n, so, again, we find some numbers (at least one) whose sum is a multiple of n.

If $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$, then among the elements $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ we can find some whose sum is a multiple of n, i.e. there exists a subset of $\{a_1, \ldots, a_n\}$ that has the sum of its elements a multiple of n. If b is one of the elements of this subset, consider the set consisting of the other n elements of A. According to the Lemma, $A \setminus \{b\}$ also has a subset that has the sum of its elements a multiple of n. Unlike the other subset, this subset does not contain b, so the two subsets are different. If they are disjoint, we can consider their union. The sum of the elements of this third set will also be a multiple of n, proving that $n(A) \geq 3$. If the two subsets are not disjoint, consider a common element c and we remove it from A. The remaining set, $A \setminus \{c\}$ must have, according to the Lemma, a subset that has the sum of its elements a multiple of n. Unlike the other two sets, this set does not contain c, therefore it is clearly a third set, different from the other two.

We conclude that any set with $n+1$ integer elements has 3 subsets that have the sum of their elements a multiple of n, showing that we have always $n(A) \geq 3$.
Next, let us prove that this minimum value can actually be achieved, i.e. there exists a set consisting of $n+1$ positive integers that has exactly three subsets whose elements sum up to a multiple of n.
We can take $A = \{n, 2n\} \cup \{1, n+1, 2n+1, 3n+1, \ldots, (n-2)n+1\}$. We have two

elements that are congruent to 0 (mod n) and $n-1$ elements congruent to 1 (mod n). The only non-empty subsets that have the sum of their elements a multiple of n are $\{n\}$, $\{2n\}$ and $\{n, 2n\}$.

Thus $\min n(A) = 3$.

The maximum value of $n(A)$ is $2^n - 1$. We know that A has (at least) an element that is not a multiple of n. Let b be such an element, and $A = \{b, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. The subsets of A (including here also the empty set) are of two types: those containing b and those not containing b. We can pair up each subset of the former type, S, with the subset $S \cup \{b\}$ which is of the latter type. In total, there are 2^n disjoint pairs of the form $(S, S \cup \{b\})$. We can not have both sets from a pair to have the sums of their elements multiples of n because this would to $n \mid b$. Therefore at most 2^n of the subsets of A can have the sum of their elements a multiple of n. But if we look at the pair consisting of the empty set and $\{b\}$, the empty set is counted as the one that has the sum of its elements a multiple of n. This gives us at most $2^n - 1$ non-empty subsets that have the sum of their elements divisible by n.

Finally, we must provide an example of a set A that has indeed $n(A) = 2^n - 1$. Consider $A = \{1\} \cup \{n, 2n, 3n, \ldots, n^2\}$. The non-empty subsets of A that have the sum of their elements divisible by n are precisely the non-empty subsets of $\{n, 2n, \ldots, n^2\}$, and there are $2^n - 1$ of them.

Thus, $\max n(A) = 2^n - 1$.