Problema săptămânii 391

Determinaţi toate numerele naturale nenule n pentru care $n \cdot 2^n + 1$ este pătrat perfect.

Olimpiada britanică de matematică, 2024

Soluţie: Evident, $n \cdot 2^n + 1$ este număr impar oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Căutăm aşadar un pătrat perfect impar, $(2k + 1)^2$, astfel incât $n \cdot 2^n + 1 = (2k + 1)^2$. Această ecuaţie revine la $n \cdot 2^{n-2} = k(k + 1)$.
Să observăm că $n = 2$ şi $n = 3$ sunt soluţii ale problemei, în timp ce $n = 1$ şi $n = 4$ nu sunt soluţii. În continuare arătăm că numerele $n \geq 5$ nu au proprietatea din enunţ.
Cum $(k, k + 1) = 1$, trebuie să avem $2^{n-2} \mid k$ sau $2^{n-2} \mid k + 1$.
• Dacă $2^{n-2} \mid k$, atunci $2^{n-2} \leq k$, deci $k + 1 \leq n$. Deducem că $2^{n-2} \leq k \leq n - 1$, dar, pentru $n \geq 5$, avem $2^{n-2} > n - 1$, lucru care se demonstrează uşor prin inducţie.
• Dacă $2^{n-2} \mid k+1$, atunci $2^{n-2} \leq k+1$, deci $k \leq n$. Deducem că $2^{n-2} \leq k+1 \leq n+1$, dar, pentru $n \geq 5$, avem $2^{n-2} > n + 1$, lucru care se demonstrează uşor prin inducţie.
Conchidem că singurele soluţii sunt 2 şi 3.

Remarcă: Condiţia n nenul exclude $n = 0$ care satisface condiţia ca $n \cdot 2^n$ să fie pătrat prefect.

Puteţi urmări şi o prezentare video a soluţiei.

Am primit soluţii de la: *Titu Zvonaru, Gheorghe Iurea, Robert Isepciuc, Cristian Muth* şi *Eric-Dimitrie Cismaru.*

Problem of the week no. 391

Find all positive integers n such that $n \cdot 2^n + 1$ is a square.

British Mathematical Olympiad, round 1, 2024

Solution: Clearly, $n \cdot 2^n + 1$ is odd for all $n \in \mathbb{N}$. We are looking for an odd perfect square, $(2k + 1)^2$, such that $n \cdot 2^n + 1 = (2k + 1)^2$. This equation reduces to $n \cdot 2^{n-2} = k(k + 1)$.
Notice that $n = 2$ and $n = 3$ are solutions to the problem, while $n = 1$ and $n = 4$ are not. In the sequel, we show that no $n \geq 5$ has the desired property.
As $(k, k + 1) = 1$, we must have $2^{n-2} \mid k$ i.e. $2^{n-2} \mid k + 1$.
• If $2^{n-2} \mid k$, then $2^{n-2} \leq k$, therefore we must have $k + 1 \leq n$. It follows that $2^{n-2} \leq k \leq n - 1$, but, by induction, $2^{n-2} > n - 1$, for all $n \geq 5$.
• If $2^{n-2} \mid k + 1$, then $2^{n-2} \leq k + 1$, hence $k \leq n$. It follows that $2^{n-2} \leq k + 1 \leq n + 1$, but, for $n \geq 5$, we have $2^{n-2} > n + 1$.
We conclude that the only solutions to the problem are 2 and 3.

The video solution on the website of UK Maths Trust.