Problema săptămânii 390

Dacă $a, b, c \geq 0$ verifică $a + b + c \geq 3$, arătaţi că $a^4 + b^3 + c^2 \geq a^3 + b^2 + c$.

Festivalul matematic Kiev, 2019

Soluţie: Vom folosi inegalitatea $x^{k+1} - x^k \geq x - 1, \forall\, x \geq 0, \forall\, k \in \mathbb{N}^*$.
Această inegalitate este echivalentă cu $(x^k - 1)(x - 1) \geq 0$ şi este adevărată pentru că $x^k - 1$ şi $x - 1$ au acelaşi semn. Egalitatea are loc dacă $x = 1$.
Folosind inegalitatea de mai sus, avem că

$$a^4 + b^3 + c^2 - a^3 - b^2 - c = (a^4 - a^3) + (b^3 - b^2) + (c^2 - c) \geq (a-1) + (b-1) + (c-1) \geq 0.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a = b = c = 1$.

Generalizare
Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ verifică $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n$, iar $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$a_1^{k_1+1} + a_2^{k_2+1} + \ldots + a_n^{k_n+1} \geq a_1^{k_1} + a_2^{k_2} + \ldots + a_n^{k_n}.$$

Am primit soluţii de la: *Gheorghe Iurea, Titu Zvonaru, Eric-Dimitrie Cismaru, Marius-Valentin Drăgoi, Robert Isepciuc, Ioan-Viorel Codreanu* şi *Maria Ciucu.*

Problem of the week no. 390

If $a, b, c \geq 0$ satisfy $a + b + c \geq 3$, prove that $a^4 + b^3 + c^2 \geq a^3 + b^2 + c$.

Kyiv mathematical festival, 2019

Solution: We shall use that $x^{k+1} - x^k \geq x - 1, \forall\, x \geq 0, \forall\, k \in \mathbb{N}$.
This inequality is equivalent to $(x^k - 1)(x - 1) \geq 0$ and it is true because $x^k - 1$ and $x - 1$ have the same sign. Equality holds for $x = 1$.
Using the inequality from above, we have

$$a^4 + b^3 + c^2 - a^3 - b^2 - c = (a^4 - a^3) + (b^3 - b^2) + (c^2 - c) \geq (a-1) + (b-1) + (c-1) \geq 0.$$

Equality holds if and only if $a = b = c = 1$.

Other solutions can be found on AoPS.