Problema săptămânii 390

Dacă $a, b, c \geq 0$ verifică $a + b + c \geq 3$, arătați că $a^4 + b^3 + c^2 \geq a^3 + b^2 + c$.

Soluții:

I. Vom demonstra că pentru orice $x \geq 0$ și orice număr natural $k \geq 1$ avem

$$x^{k+1} \geq x^k + x - 1 \quad (1)$$

Inegalitatea (1) se scrie

$$x^k(x-1) - (x-1) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\left(x^{k-1} + \cdots + x + 1\right) \geq 0.$$

Folosind inegalitatea (1) obținem

$$a^4 + b^3 + c^2 \geq a^3 + a - 1 + b^2 + b - 1 + c + c - 1 = a^3 + b^2 + c + a + b + c - 3.$$

II. Aplicând inegalitatea lui Bergström avem

$$a^4 + b^3 + c^2 = \frac{a^6}{a^2} + \frac{b^4}{b} + \frac{c^2}{1} \geq \frac{(a^3 + b^2 + c)^2}{a^2 + b + 1}.$$

Rămâne să arătăm că $a^3 + b^2 + c \geq a^2 + b + 1$. Deoarece $c \geq 3 - a - b$, este suficient să demonstrăm că $a^3 + b^2 + 3 - a - b \geq a^2 + b + 1$. Ultima inegalitate se scrie

$$a^3 - a^2 - a + 1 + (b-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2(a+1) + (b-1)^2 \geq 0.$$

III. Folosim inegalitatea mediilor, grupând astfel încât să micșorăm puterile (dar să rămână suma $a + b + c$):

$$a^4 + b^3 + c^2 = \frac{a^4 + a^4 + a^4 + 1}{3} + \frac{b^3 + b^3 + 1}{2} + \frac{c^2 + 1}{1} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1 \geq$$
$$\geq \frac{4a^3}{3} + \frac{3b^2}{2} + 2c - \frac{11}{6} = a^3 + b^2 + c + \frac{a^3 + 1 + 1}{3} + \frac{b^2 + 1}{2} + c - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{11}{6} \geq$$
$$\geq a^3 + b^2 + c + a + b + c - 3.$$