Problema Săptămânii 386

Numerele reale nenegative a, b, c satisfac $a \geq b \geq c$ și $a + b + c = 1$. Arătați că

$$a^2 + 3b^2 + 5c^2 \leq 1.$$

Soluția 1: Din condiția $a \geq b \geq c$, deducem că $1 = a+b+c \geq 3c \Leftrightarrow c \leq \frac{1}{3}$. Considerăm $f(a,b,c) = a^2 + 3b^2 + 5c^2$. Tripletul $(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c)$ verifică $\frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2} + c = 1$. Arătăm că $f(a,b,c) \leq f(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c) \leq 1$. Avem $f(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c) - f(a,b,c) = (a+b)^2 - a^2 - 3b^2 =$ $= 2b(a-b) \geq 0$, deci $f(a,b,c) \leq f(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c)$. În continuare, $f(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c) \leq 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (a+b)^2 + 5c^2 \leq 1$. Din enunț, $(a+b)^2 + 5c^2 = (1-c)^2 + 5c^2 = 6c^2 - 2c + 1 \leq 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2c(3c-1) \leq 0$, ceea ce este evident.
Egalitatea se atinge pentru $(a,b,c) \in \{(1,0,0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})\}$.

Soluția 2: Este suficient să arătăm că $1 = (a+b+c)^2 \geq a^2 + 3b^2 + 5c^2$ sau că $2ab + 2bc + 2ca \geq 2b^2 + 4c^2$. Însă $2ab \geq 2b \cdot b = 2b^2$, iar $2c(a+b) \geq 2c \cdot 2c = 4c^2$, de unde rezultă concluzia.
Egalitatea se atinge pentru $(a,b,c) \in \{(1,0,0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})\}$.