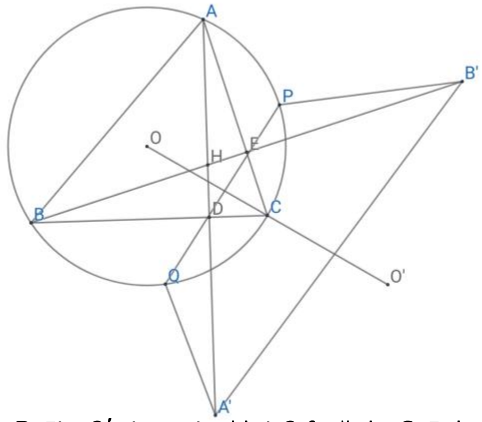
Problema săptămânii 385

Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC, iar D și E picioarele înălțimilor din A, respectiv B. Dreapta DE intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în punctele P și Q. Fie A' și B' simetricele punctelor A și B față de BC, respectiv AC. Arătați că punctele A', B', P și Q se află pe un cerc. Dacă O' este centrul acestui cerc, arătați că C este mijlocul segmentului $[OO']$.

Soluție:



Presupunem ordinea $Q - D - E - P$. Fie O' simetricul lui O față de C. Folosind relația lui Stewart avem $OE^2 = R^2 - ac\cos A\cos C$ și $R^2 h_b - 2(R^2 - ac\cos A\cos C)h_b + OB'^2 h_b = 2h_b^3$. Obținem $OB'^2 = 2h_b^2 + R^2 - 2ac\cos A\cos C$. Cu formula medianei rezultă că

$$4B'C^2 = 2OB'^2 + 2O'B'^2 - OO'^2$$

$$2O'B'^2 = 4a^2 - 4h_b^2 - 2R^2 + 4ac\cos A\cos C + 4R^2$$

$$2b^2O'B'^2 = 4a^2b^2 - 16S^2 + 2b^2R^2 + (b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + b^2 - c^2)$$

$$2b^2O'B'^2 = 4a^2b^2 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2a^2c^2 + a^4 + b^4 + c^4 + 2b^2R^2 + b^4 - c^4 - a^4 + 2a^2c^2$$

$$2b^2O'B'^2 = 2a^2b^2 - 2b^2c^2 + 2b^4 + 2b^2R^2 \Leftrightarrow O'B'^2 = a^2 - c^2 + b^2 + R^2$$

Analog obținem $O'C'^2 = b^2 - c^2 + a^2 + R^2$, deci $O'B' = O'C'$.

Cu puterea punctului față de cerc avem

$$PE(c\cos C + QD) = ac\cos A\cos C, QD(c\cos C + PE) = bc\cos A\cos C.$$

Scăzând aceste relații obținem $PE - QD = a\cos A - b\cos B$ și apoi $QD^2 + 2b \cdot QD\cos A\cos C = bc\cos B\cos C$. Aplicând teorema cosinusului în triunghiul QDC, avem

$$QC^2 = DC^2 + QD^2 + 2DC \cdot QD\cos A = b^2\cos^2 C + QD^2 + 2b \cdot QD\cos A\cos C$$
$$= b\cos C(b\cos C + c\cos B) = ab\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}.$$

Folosind formula pentru lungimea medianei în triunghiul OQO' deducem că

$$4QC^2 = 2QO^2 + 2QO'^2 - OO'^2 \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 - 2c^2 = 2R^2 + 2O'Q^2 - 4R^2,$$

deci $O'Q^2 = a^2 + b^2 - c^2 + R^2$.

Am obținut $O'P = O'Q = O'A' = O'B'$