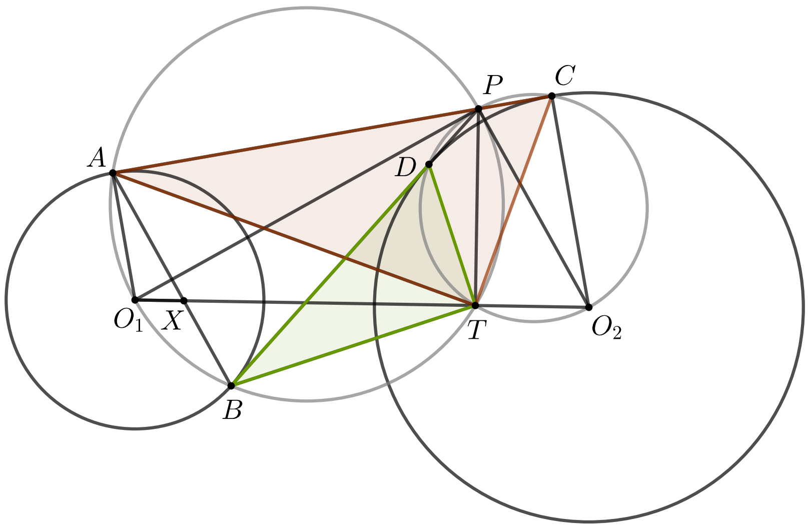
Problema săptămânii 389

Cercurile ω_1 şi ω_2, de centre O_1, respectiv O_2, sunt exterioare. Două tangente comune, una exterioară, cealaltă interioară sunt tangente cercului ω_1 în punctele A şi B, iar cercului ω_2 în punctele C şi D. Punctele A, C, D sunt în acelaşi semiplan determinat de O_1O_2. Arătaţi că dreptele AB, CD şi O_1O_2 sunt concurente.

Soluţie: Fie $\{P\} = BD \cap AC$ şi $\{X_1\} = CD \cap AB$. Atunci $PC = PD$, deci $\sphericalangle PCD = \sphericalangle PDC = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle APB$, deci CD este paralelă cu bisectoarea $\sphericalangle APB$ care e şi înălţime în ΔAPB, deci $CD \perp AB$. Avem $\Delta AX_1C \sim \Delta BX_1D$, deci $\dfrac{AX_1}{X_1B} = \dfrac{AC}{BD}$.
Fie $\{X\} = AB \cap O_1O_2$. Arătăm că $\dfrac{AX}{XB} = \dfrac{AC}{BD}$, de unde va rezulta că $X_1 = X$ şi concluzia.
Fie $PT \perp O_1O_2$, $T \in O_1O_2$. Atunci punctele A, B şi T se află pe cercul de diametru $[PO_1]$, iar C, D şi T pe cercul de diametru $[PO_2]$.
Cum $AO_1 = O_1B$, avem $\sphericalangle ATO_1 = \sphericalangle BTO_1$. Din teorema bisectoarei rezulta

$$\frac{AX}{XB} = \frac{AT}{BT}.$$

Dar $\Delta\, ATC \sim \Delta\, BTD$ căci $\sphericalangle TAP = \sphericalangle TBP$ şi $\sphericalangle ACT = \sphericalangle BDT$ ($CPDT$ este inscriptibil), deci $\dfrac{AT}{BT} = \dfrac{AC}{BD}$. Conchidem că $\dfrac{AX}{XB} = \dfrac{AT}{BT} = \dfrac{AC}{BD} = \dfrac{AX_1}{BX_1}$, de unde concluzia.



Am primit soluţii de la *Gheorghe Iurea, Maria Ciucu* şi *Ioana Vlădoiu.*

Problem of the week no. 389

Consider two exterior circles, ω_1 and ω_2, of centers O_1 and O_2, respectively. Two common tangents, one external, the other internal, meet ω_1 at A and B, respectively, and meet ω_2 at C and D, respectively. Points A, C, D are on the same side of the line O_1O_2. Prove that lines AB, CD and O_1O_2 are concurrent.

Solution: Consider $\{P\} = BD \cap AC$ and $\{X_1\} = CD \cap AB$. As $PC = PD$, hence $\sphericalangle PCD = \sphericalangle PDC = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle APB$, which means that CD is parallel to the bisector of angle $\sphericalangle APB$. But triangle ΔAPB is isosceles, so $CD \perp AB$. It follows that $\Delta AX_1C \sim \Delta BX_1D$, hence $\dfrac{AX_1}{X_1B} = \dfrac{AC}{BD}$.

Consider $\{X\} = AB \cap O_1O_2$. We prove that $\dfrac{AX}{XB} = \dfrac{AC}{BD}$, which means that $X_1 = X$ and proves the conclusion.

Draw $PT \perp O_1O_2$, $T \in O_1O_2$. Points A, B and T are on the circle of diameter $[PO_1]$, while C, D and T are on the circle of diameter $[PO_2]$.

As $AO_1 = O_1B$, we have $\sphericalangle ATO_1 = \sphericalangle BTO_1$. It follows that

$$\frac{AX}{XB} = \frac{AT}{BT}.$$

But $\Delta\, ATC \sim \Delta\, BTD$ because $\sphericalangle TAP = \sphericalangle TBP$ and $\sphericalangle ACT = \sphericalangle BDT$ ($CPDT$ is cyclic), hence $\dfrac{AT}{BT} = \dfrac{AC}{BD}$. We conclude that $\dfrac{AX}{XB} = \dfrac{AT}{BT} = \dfrac{AC}{BD} = \dfrac{AX_1}{BX_1}$, which finishes the proof.