Problema săptămânii 388

Fie n un număr natural nenul. Roger are o grădină pătrată $(2n+1) \times (2n+1)$. El plasează garduri pentru a-şi împărţi grădina în parcele dreptunghiulare. El vrea să obţină exact câte două parcele orizontale $k \times 1$ şi două parcele verticale $1 \times k$ pentru fiecare număr par k cuprins între 1 şi $2n+1$, precum şi o singură parcelă pătrată 1×1. În câte moduri poate Roger realiza împărţirea?

Olimpiadă Elveţia, $2022 - 2023$

Soluţie: (*Gheorghe Iurea*)

Notăm a_m numărul de moduri în care Roger poate realiza împărţirea pătratului $(2m+1) \times (2m+1)$ respectând cerinţele problemei.

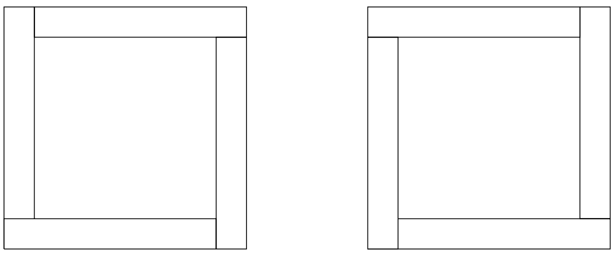
Plasăm mai întâi parcelele $1 \times (2m)$ şi $(2m) \times 1$. Să considerăm că parcelele $1 \times (2m)$ sunt plasate pe liniile i şi j, cu $1 \leq i < j \leq 2m+1$. Pentru fiecare din ele există câte două opţiuni: pot ocupa coloanele de la 1 la $2m$ sau de la 2 la $2m+1$.

• Dacă parcelele ocupă aceleaşi coloane, avem o singură coloană liberă. Pe celelalte nu putem plasa o parcelă $(2m) \times 1$ deoarece ea nu încape nici deasupra liniei i (sunt $i-1 < 2m$ linii disponibile), nici între liniile i şi j (sunt $j-i-1 < 2m$ linii disponibile) şi nici dedesubtul liniei j (sunt $2m - j + 1 < 2m$ linii disponibile).

Aşadar, în acest caz putem plasa o singură parcelă $(2m) \times 1$, deci acest caz nu convine.

• Dacă parcela de pe linia i ocupă primele $2m$ pătrăţele ale liniei, iar parcela de pe linia j ocupă ultimele $2m$ pătrăţele ale liniei, ca mai sus se arată că pe coloanele $2, 3, \ldots, 2m$ nu se poate plasa nicio parcelă $(2m) \times 1$. Prin urmare, cele două parcele $(2m) \times 1$ trebuie plasate pe prima şi pe ultima coloană. Pe coloana 1 sunt disponibile $i - 1 < 2m$ pătrăţele deasupra liniei i şi $2m + 1 - i \leq 2m$ pătrăţele dedesubtul liniei i. Putem plasa aici o parcelă dacă şi numai dacă $i = 1$. Similar, pe ultima coloană sunt disponibile $j - 1 \leq 2m$ pătrăţele deasupra liniei j şi $2m + 1 - j < 2m$ dedesubtul liniei j. Putem plasa o parcelă pe ultima coloană dacă şi numai dacă $j = 2m + 1$.

Aşadar, în acest caz, parcelele formate din $2m$ pătrăţele trebuie plasate ca în configuraţia din dreapta din figura de mai jos.



• Dacă parcela de pe linia i ocupă ultimele $2m$ pătrăţele ale liniei, iar parcela de pe linia j ocupă primele $2m$ pătrăţele ale liniei, ca mai sus se arată că parcelele $(2m) \times 1$ trebuie plasate pe prima şi pe ultima coloană. Pe coloana 1 sunt disponibile $j-1 \leq 2m$ pătrăţele deasupra liniei j şi $2m+1-j < 2m$ pătrăţele dedesubtul liniei j, deci putem plasa aici o parcelă dacă şi numai dacă $j = 2m + 1$. Similar, pe ultima coloană sunt disponibile $i - 1 < 2m$ pătrăţele deasupra liniei i şi $2m + 1 - i \leq 2m$ dedesubtul liniei i. Putem plasa o parcelă pe ultima coloană dacă şi numai dacă $i = 1$.

Aşadar, în acest caz, parcelele formate din $2m$ pătrăţele trebuie plasate ca în configuraţia din stânga din figura de mai sus.
Aşadar, avem două posibilităţi pe a plasa cele 4 parcele de arie $2m$. În ambele variante rămâne de parcelat un pătrat $(2m-1) \times (2m-1)$. Acesta poate fi parcelat în a_{m-1} moduri. Aşadar, şirul (a_m) verifică $a_1 = 2$, $a_m = 2a_{m-1}$, $\forall\, m \geq 2$. Deducem că $a_m = 2^m$ pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$.
Conchidem că Roger poate realiza împărţirea în 2^n moduri.

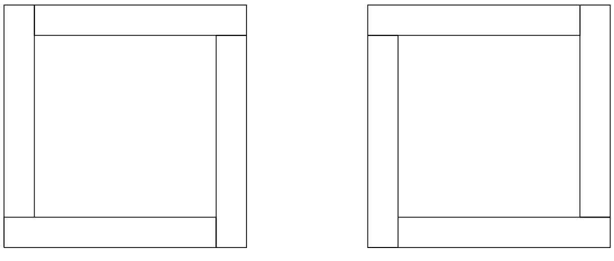
Am primit soluţii de la: *Cristian Vergelea, Gheorghe Iurea, Cristian Muth* şi *Ioana Vlădoiu.*

Problem of the week no. 388

Let n be a positive integer. Roger has a $(2n+1) \times (2n+1)$ square garden. He puts down fences to divide his garden into rectangular plots. He wants to end up with exactly two horizontal $k \times 1$ plots and exactly two vertical $1 \times k$ plots for each even integer k between 1 and $2n+1$, as well as a single 1×1 square plot. How many different ways are there for Roger to do this?

Swiss Mathematical Olympiad, 2022 – 2023

Official solution:
Consider the 4 largest plots Roger will fence off. We will prove they will comprise the border of the garden.
Consider a vertical $1 \times 2n$ piece. Clearly, one of its short (horizontal) edges must touch the border, because otherwise there would be a narrow margin of width smaller than 1 on either side of the piece which cannot belong to any of the other rectangles. We will show that a long (vertical) edge also touches the border. If this is not the case, then the horizontal space on either side of the rectangle is strictly less than $2n$, meaning that both horizontal plots would need to be situated in the remaining $(2n+1) \times 1$ strip above or below our rectangle. This is clearly impossible since $2n + 2n > 2n + 1$. Therefore it is clear that a $1 \times 2n$ piece must touch both a vertical and horizontal border, and therefore a corner; the same is true by symmetry for a $2n \times 1$ piece. We therefore have one such piece for every corner, and it is simple to see there are only two configurations possible:



After removing these 4 pieces, we are now left with a $(2n-1) \times (2n-1)$ square in the middle, which has to be subdivided exactly like in the initial problem statement (for

$n-1$ instead of n). Iterating the same argument should give us the answer 2^n. We prove this more formally with induction.
Induction hypothesis:
There are exactly 2^k possibilities to cover the $(2k+1) \times (2k+1)$-square.
Base case: For $n = 1$ we have the $2 = 2^1$ possibilities described above for the border. The remaining area is exactly the 1×1 square, which means we don't get more possibilities.
Induction step: By the reasoning above, we first choose one of two possibilities for the border of the $(2n+1) \times (2n+1)$-square and end up with a $(2n-1) \times (2n-1)$-square in the middle, which can be covered in 2^{n-1} different ways by the induction hypothesis for $k = n-1$. Since we can combine both possibilities for the border with all possibilities of the interior, we obtain $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ possibilities in total.
This proves that 2^n is indeed the answer.