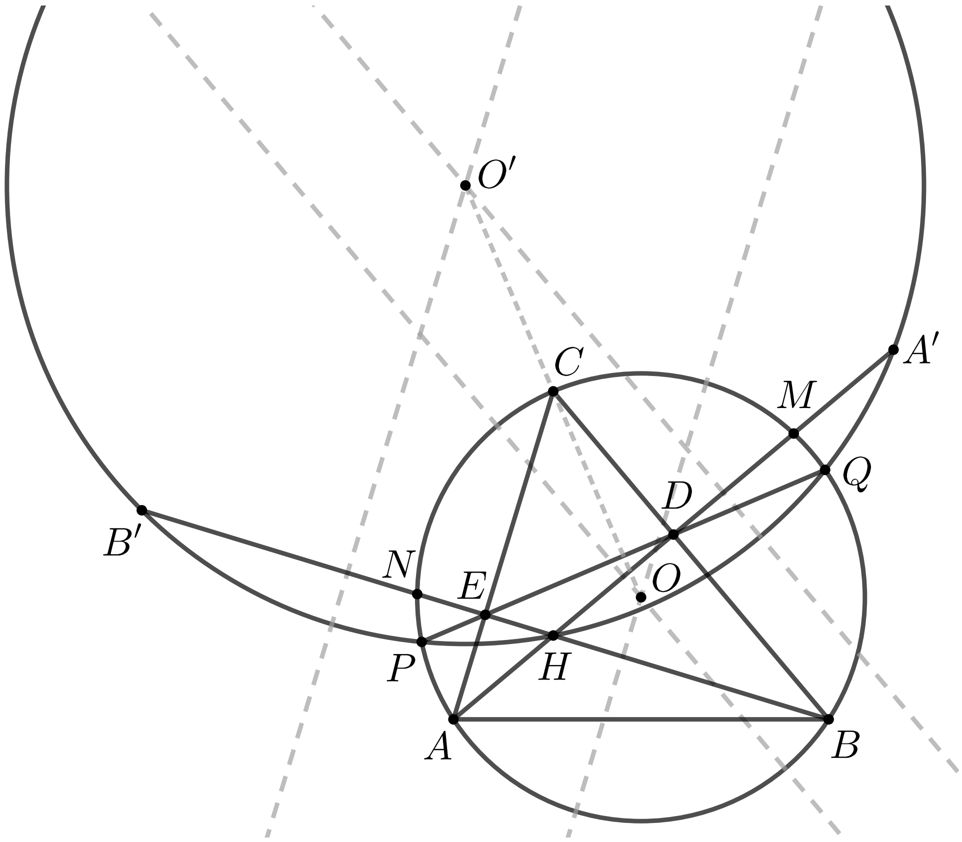
Problema săptămânii 385

Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC, iar D şi E picioarele înălţimilor din A, respectiv B. Dreapta DE intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în punctele P şi Q. Fie A' şi B' simetricele punctelor A şi B faţă de BC, respectiv AC. Arătaţi că punctele A', B', P şi Q se află pe un cerc. Dacă O' este centrul acestui cerc, arătaţi că C este mijlocul segmentului $[OO']$.

Soluţie: Fie H ortocentrul triunghiului ABC. Figura pare să sugereze că punctele A', B', P, Q şi H sunt conciclice. Vom demonstra că punctele A' şi B' se află pe cercul circumscris triunghiului PHQ. Fie M simetricul lui H faţă de D. Ştim că $H \in AA'$ şi că M se află pe cercul circumscris triunghiului ABC. Scriind puterea lui D faţă de acest cerc, avem $PD \cdot DQ = AD \cdot DM$. Dar $AD = A'D$ şi $DM = DH$ arată că $PD \cdot DQ = A'D \cdot DH$. Vom folosi acum reciproca teoremei puterii punctului: Dacă $\{D\} = HA' \cap PQ$, D este la fel poziţionat fată de segmentele $[HA']$ şi $[PQ]$ (fie este în interiorul ambelor segmente, fie pe prelungire în cazul ambelor segmente) şi $A'D \cdot DH = PD \cdot DQ$, atunci punctele A', H, P, Q sunt conciclice.
Analog rezultă că şi B', P, Q, H sunt conciclice, deci A', B', P, Q, H sunt conciclice.



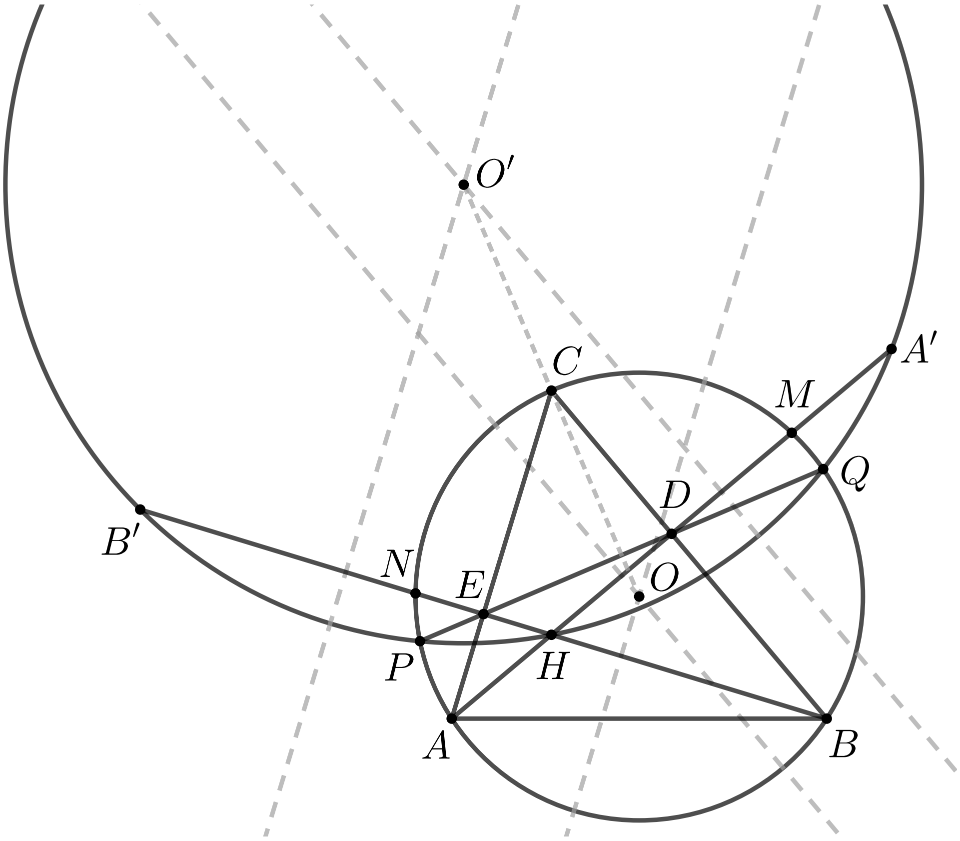
Punctul C se află pe mediatoarea BC a segmentului $[AA']$. Segmentele $[AD]$ şi $[A'H]$ sunt simetrice faţă de BC, deci şi mediatoarele acestora sunt simetrice faţă de BC (şi paralele cu aceasta). Deducem că aceste două mediatoare sunt simetrice şi faţă de punctul C. Dacă notăm cu N simetricul lui H faţă de E, analog rezultă că mediatoarele segmentelor $[BN]$ şi $[B'H]$ sunt simetrice faţă de C. Dar atunci şi punctele de intersecţie ale mediatoarelor segmentelor $[AM]$ şi $[BN]$, respectiv $[A'H]$ şi $[B'H]$ sunt simetrice faţă de C, adică O şi O' sunt simetrice faţă de C.

Am primit soluţii de la *Titu Zvonaru* şi *Gheorghe Iurea.*

Problem of the week no. 385

Let O be the circumcenter of triangle ABC, and let D and E be the feet of the altitudes from A and B, respectively. The line DE meets the circumcircle of ABC at P and Q. Let A' and B' be the reflections of A and B across the lines BC and AC, respectively. Prove that points A', B', P and Q belong to the same circle. If O' is the center of this circle, prove that C is the midpoint of the line segment $[OO']$.

Solution: Let H be the orthocenter of triangle ABC. we prove that A' and B' are on the circumcircle of triangle PHQ. Let M and N be the reflections of H across BC and AC, respectively. We know that $H \in AA'$ and also that M is on the circumcircle of triangle ABC. From the power of D with respect to this circle it follows that $PD \cdot DQ = AD \cdot DM$. But $AD = A'D$ and $DM = DH$ show that $PD \cdot DQ = A'D \cdot DH$. Next, we use the converse of the power of the point theorem: If $\{D\} = HA' \cap PQ$, D is positioned the same way with respect to the line segments $[HA']$ and $[PQ]$ (either in the interior of both segments, or on the extension of both segments) and $A'D \cdot DH = PD \cdot DQ$, then points A', H, P, Q are co-cyclic.
Similarly, B', P, Q, H are co-cyclic, i.e. A', B', P, Q, H are all co-cyclic.



Point C is on the perpendicular bisector BC of the line segment $[AA']$. Segments $[AD]$ and $[A'H]$ are symmetric with respect to BC, therefore so are their perpendicular bisectors. These perpendicular bisectors are parallel to the Symmetry line BC, therefore they are also symmetric with respect to the point C. Similarly, the perpendicular bisectors of $[BN]$ and $[B'H]$ are symmetric with respect to C. It follows that the intersection point of the perpendicular bisectors of $[AM]$, $[BN]$, and $[A'H]$, $[B'H]$, respectively, are also symmetric with respect to C, in other words points O and O' are symmetric with respect to C.