Problema săptămânii 357

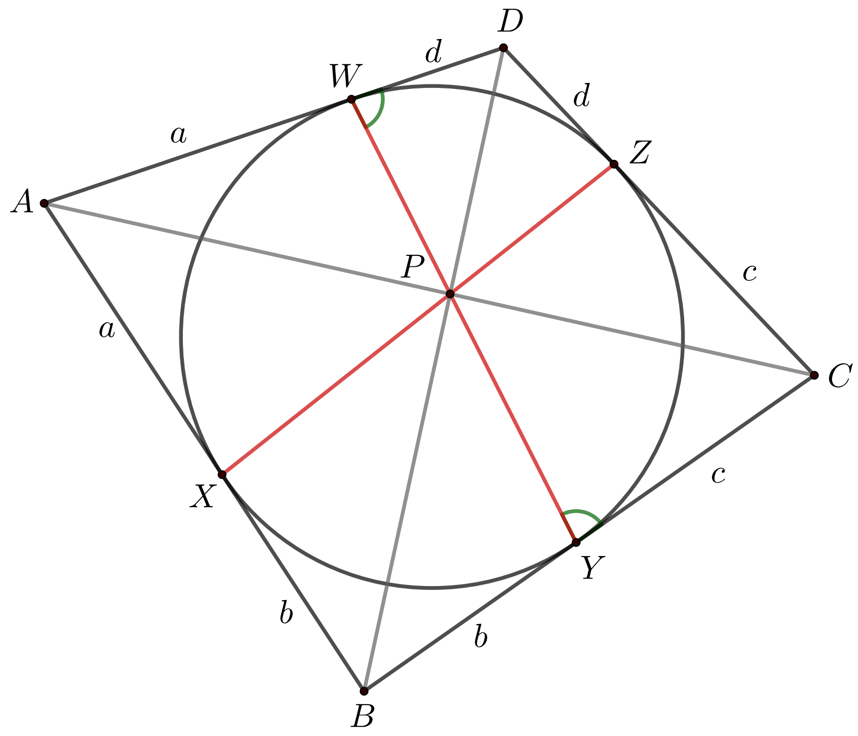
Fie $ABCD$ un patrulater circumscriptibil şi X, Y, Z, W punctele de tangenţă ale laturilor AB, BC, CD, respectiv DA cu cercul înscris.
Demonstraţi că dreptele AC, BD, XZ şi YW sunt concurente.

Soluţia 1: Fie $a = AX = AW$, $b = BX = BY$, $c = CY = CZ$, $d = DZ = DW$ şi fie $\{P\} = YW \cap BD$. Avem $\sphericalangle CYW \equiv \sphericalangle DWY$ (ambele subîntind arcul YW). Notăm măsura acestora cu α. Scriind teorema sinusurilor în triunghiurile BPY şi DPW avem

$$\frac{DW}{DP} = \frac{\sin(\sphericalangle DPW)}{\sin\alpha} = \frac{\sin(\sphericalangle BPY)}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{BY}{BP},$$

deducem că P este acel punct al diagonalei BD pentru care $\dfrac{DP}{BP} = \dfrac{d}{b}$.

Analog, notând cu P' intersecţia lui XZ cu BD, deducem că $\dfrac{DP'}{BP'} = \dfrac{d}{b}$, deci că P' coincide cu P. Am arătat aşadar că punctul de intersecţie a dreptelor XZ şi YW se află pe diagonala BD. Analog se arată că acest punct se află pe diagonala AC, deci că XZ şi YW trec prin punctul de intersecţie a diagonalelor patrulaterului.



Soluţia 2: (*Alexandru Ciobotea*)
Fie $\{P\} = XZ \cap YW$ şi $\{R\} = XW \cap YZ$. Din teorema lui Pascal aplicată hexagramei $XXZYYW$ rezultă că punctele $XX \cap YY = \{B\}$, $XZ \cap YW = \{P\}$ şi $ZY \cap WX = \{R\}$ sunt coloniare. Analog, din teorema lui Pascal aplicată hexagramei $WWXZZY$ rezultă că punctele $WW \cap YY = \{D\}$, $WX \cap ZY = \{R\}$ şi

$XZ \cap YW = \{P\}$ sunt coliniare. Conchidem că punctele B, P, D (şi R) sunt coliniare. Analog se arată A, P, C sunt coliniare.
Demonstraţia nu ar fi completă fără analiza cazului în care $XW \parallel YZ$ (în acest caz nu există punctul R folosit mai sus). Se poate arăta uşor că în acest caz $XW \parallel BD$ şi $ABCD$ este deltoid cu $AB = AD$, $CB = CD$, iar concluzia rezultă atunci imediat. O posibilă justificare: A se află pe mediatoarea lui XW, C pe mediatoarea lui YZ, dar $XYZW$ este trapez isoscel sau dreptunghi, deci cele două mediatoare coincid.

Vă reamintim
Teorema lui Pascal (Pascal's Hexagrammum Mysticum Theorem)
Dacă $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ sunt puncte pe un cerc (nu neapărat în această ordine), atunci punctele $P_{14} = A_2A_3 \cap A_5A_6$, $P_{25} = A_3A_4 \cap A_6A_1$ şi $P_{36} = A_1A_2 \cap A_4A_5$ sunt coliniare. Dacă $A_i = A_j$, dreapta A_iA_j se consideră a fi tangenta în A_i la cerc.

Vă semnalăm alte două probleme care rezultă din relaţia $\dfrac{DP}{BP} = \dfrac{d}{b}$ demonstrată la Soluţia 1.

1. Cu notaţiile din figura de mai sus, dreptele BZ, DY şi AC sunt concurente.
2. Cercul înscris în triunghiul ABC intersectează laturile AB şi AC în punctele N, respectiv M. Fie P un punct oarecare de pe latura (BC), $\{Q\} = AP \cap BN$ şi $\{R\} = QM \cap AB$. Atunci PR este tangent cercului înscris în triunghiul ABC.

Mai multe detalii şi interesante consecinţe ale acestei proprietăţi pot fi găsite în Circumscribed quadrilaterals revisited de Darij Grinberg.

Am primit soluţii de la: *Ioan Viorel Codreanu* şi *Alexandru Ciobotea* (două soluţii).

Problem of the week no. 357

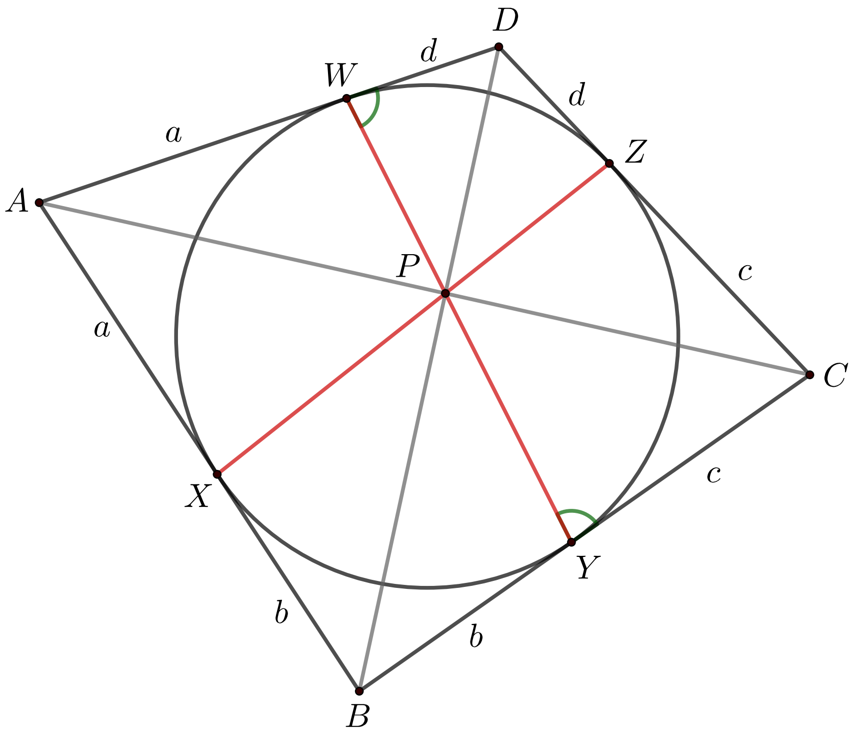
Let $ABCD$ be a circumscribed quadrilateral and let X, Y, Z, W be the touch points of sides AB, BC, CD and DA, respectively, with the incircle of the quadrilateral. Prove that lines AC, BD, XZ and YW are concurrent.

Solution 1:
Put $a = AX = AW$, $b = BX = BY$, $c = CY = CZ$, $d = DZ = DW$ and consider $\{P\} = YW \cap BD$. Notice that $\sphericalangle CYW = \sphericalangle DWY$ (both measure half of the arc YW). We denote them by α. We write the law of sines in triangles BPY and DPW getting

$$\frac{DW}{DP} = \frac{\sin(\sphericalangle DPW)}{\sin \alpha} = \frac{\sin(\sphericalangle BPY)}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{BY}{BP},$$

which means that P is the point situated on the diagonal BD for which $\dfrac{DP}{BP} = \dfrac{d}{b}$.

Similarly, if we define P' the intersection point between XZ and BD, we get that $\dfrac{DP'}{BP'} = \dfrac{d}{b}$, which shows that points P' and P coincide. Thus, we have proven that the intersection point of the lines XZ and YW is situated on the diagonal BD. Similarly, it must belong also to the diagonal AC, which means that lines XZ and YW meet at the intersection point of the diagonals of the quadrilateral.



Solution 2: (*Alexandru Ciobotea*)
Put $\{P\} = XZ \cap YW$ and $\{R\} = XW \cap YZ$. Applying Pascal's Hexagrammum Mysticum Theorem to the hexagram $XXZYYW$ shows that points $XX \cap YY = \{B\}$, $XZ \cap YW = \{P\}$ and $ZY \cap WX = \{R\}$ are collinear. Applying it again to the hexagram $WWXZZY$ shows that points $WW \cap YY = \{D\}$, $WX \cap ZY = \{R\}$ and $XZ \cap YW = \{P\}$ are also collinear. We conclude that points B, P, D (and R) are collinear. Similarly, A, P, C are also collinear.
What if $XW \parallel YZ$ (in this case the point R does not exist). In this case $XW \parallel BD$ and $ABCD$ is a kite with $AB = AD$, $CB = CD$, and the conclusion is immediate. A possible argument: A is on the perpendicular bisector of XW, C is on the perpendicular bisector of YZ, but $XYZW$ is an isosceles trapezoid (or a rectangle) so the two perpendicular bisectors coincide.

We remind
Pascal's Hexagrammum Mysticum Theorem
If $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ are points on a circle (not necessarily in this order), then points $P_{14} = A_2A_3 \cap A_5A_6$, $P_{25} = A_3A_4 \cap A_6A_1$ and $P_{36} = A_1A_2 \cap A_4A_5$ are collinear. If

$A_i = A_j$, we consider the line A_iA_j to be the tangent at A_i to the circle.

More on this configuration and also some interesting consequences can be found in Circumscribed quadrilaterals revisited by Darij Grinberg.