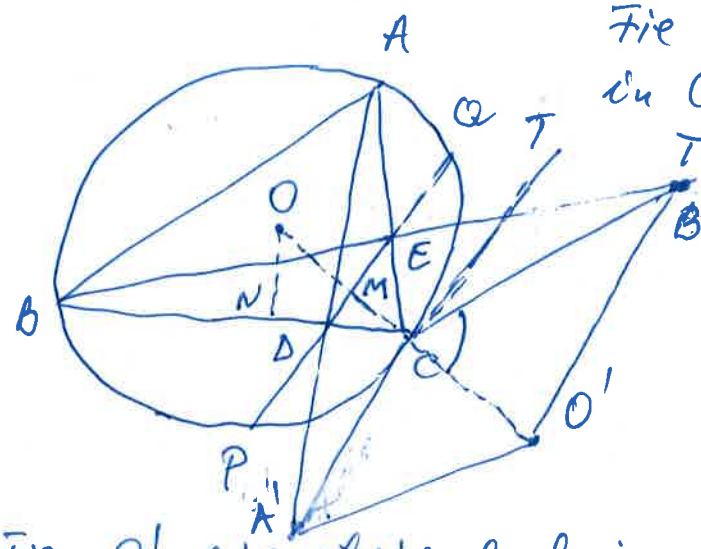
Problema 385

Soluție (Iurea Gheorghe, Iași)



Fie $M = PQ \cap OC$ și TC tangenta în C la cerc. Rezultă că $\widehat{TCA} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} = A\widehat{B}C = D\widehat{E}C$, deci $TC \parallel PQ$ și cum $OC \perp TC$, deducem că $OC \perp PQ$, astfel OC este mediatoarea segmentului PQ.

Fie O' simetricul lui O față de C. Folosind notațiile obișnuite în triunghi avem:

$CD = b\cos C$ (din ΔADC). Dacă $ON \perp BC$, din $\Delta CMD \sim \Delta CNO \Rightarrow \frac{CM}{CN} = \frac{CD}{CO} \Rightarrow CM = \frac{ab\cos C}{2R} = \frac{a^2+b^2-c^2}{4R}$

Astfel din $\Delta O'QM$ $O'Q^2 = QM^2 + MO'^2 = OQ^2 - OM^2 + MO'^2$

$= R^2 - (R-CM)^2 + (R+CM)^2 = R^2 + 4R\cdot CM = R^2 + a^2 + b^2 - c^2$

Cum OO' este mediatoarea segmentului PQ deducem: $O'P^2 = O'Q^2 = R^2 + a^2 + b^2 - c^2$.

Din Δ isoscel AOC, $O\widehat{C}A = 90^\circ - B$, deci $B'\widehat{C}O' = 180^\circ - B'\widehat{C}A - A\widehat{C}O' = 180^\circ - C - 90^\circ + B = 90^\circ - (C-B)$ ($\Delta BCB'$ este isoscel). Dar $CB' = CB = a$ și $CO' = CO = R$, rezultă că $B'O'^2 = CB'^2 + CO'^2 - 2CB'\cdot CO'\cos(90^\circ - (C-B))$

$= a^2 + R^2 - 2aR\sin(C-B) = a^2 + R^2 - 2aR(\sin C\cos B - \sin B\cos C)$

$= a^2 + R^2 - 2aR\left(\frac{c}{2R}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} - \frac{b}{2R}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) = a^2 + R^2 + b^2 - c^2$.

Similar din $\Delta A'CO'$, în care $CA' = b$, $CO' = R$ și $A'\widehat{C}O' = 90^\circ - (C-A)$, gă din $A'O'^2 = a^2 + R^2 + b^2 - c^2$

Din $AO' = B'O' = PO' = A'O'$ și $CO' = CO$, rezultă concluzia problemei.