



Secțiunea Juniori
Simulare 1 - Baraj juniori
17 Decembrie 2023

- Subiecte -

Selecție probleme
Andrei Eckstein

§1 Subiecte

Problema 1

Determinați toate numerele naturale n pentru care există $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n = 6n \quad \text{și} \quad \frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \dots + \frac{n}{a_n} = 2 + \frac{1}{n}.$$

Problema 2

Fie C_1 și C_2 două cercuri care se intersectează în E și în F și având razele diferite. Notăm cu O_1 și O_2 centrele cercurilor C_1 , respectiv C_2 și considerăm T_1T_2 o tangentă comună la cele două cercuri cu $T_1 \in C_1$ și $T_2 \in C_2$. Arătați că dreptele T_1O_2 , T_2O_1 și EF sunt concurente dacă și numai dacă unghiul O_1FO_2 este drept.

Problema 3

Determinați perechile (n, d) de numere naturale nenule care au proprietatea că, dintre orice $n + 2$ numere naturale se pot alege n cu suma divizibilă cu d .

Problema 4

În jurul unei mese rotunde sunt așezate n persoane ($n \geq 3$) care joacă un joc. Inițial, una dintre persoanele de la masă are n cărți de joc, iar celelalte $n - 1$ persoane nu au nicio carte. La o mutare, unul dintre jucătorii care dispun de cel puțin două cărți distribuie simultan două din cărțile sale, una către vecinul din dreapta, alta către vecinul din stânga. Atunci când nu se mai pot face mutări jocul se încheie.

- Arătați că pentru $n = 7$ jocul se poate încheia.
- Arătați că pentru $n = 8$ jocul nu se poate încheia, adică va exista mereu cel puțin o persoană care are cel puțin două cărți.
- Determinați valorile lui n pentru care jocul se poate încheia.

Timp de lucru: 240 de minute.

Pentru fiecare problemă se acordă maxim 7 puncte.

Nu este permisă utilizarea calculatorului sau a oricărui alt instrument, cu excepția riglei și a compasului.