Secțiunea Juniori
Simulare 1 - Baraj juniori
17 Decembrie 2023

- Soluții -

Selecție probleme
Andrei Eckstein

§1 Soluții

Problema 1

Determinaţi toate numerele naturale n pentru care există $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + na_n = 6n \text{ şi } \frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \ldots + \frac{n}{a_n} = 2 + \frac{1}{n}.$$

baraj Olanda 2015

Demonstraţie. Din inegalitatea lui Titu Andreescu rezultă că

$$\frac{2n+1}{n} = \frac{1^2}{1 \cdot a_1} + \frac{2^2}{2a_2} + \ldots + \frac{n^2}{na_n} \geq \frac{(1+2+\ldots+n)^2}{a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n} = \frac{n(n+1)^2}{24},$$

deci că $n^2(n+1)^2 \leq 24(2n+1) < 48(n+1)$, de unde $n^2(n+1) < 48$. Deducem că $n \leq 3$.
Pentru $n = 1$ ar trebui ca $a_1 = 6$ dar totodată şi $\frac{1}{a_1} = 3$, ceea ce nu se poate.
Pentru $n = 2$ ar trebui ca $a_1 + 2a_2 = 12$ şi $\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} = \frac{5}{2}$. Din prima relaţie rezultă $a_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dar niciuna din aceste variante nu conduce la o soluţie cu $a_1, a_2 \in \mathbb{N}^*$.
În fine, pentru $n = 3$ ar trebui ca $a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 18$ şi $\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \frac{3}{a_3} = \frac{7}{3}$. Găsim destul de uşor soluţia $x = 6$, $y = 3$, $z = 2$.
În concluzie, $n = 3$ este singurul număr cu proprietatea din enunţ.

Barem:

- Arată că $n \leq 3$. 4p
- exemplu pentru $n = 3$ 2p
- Arată că $n = 1$ şi $n = 2$ nu convin. 1p

$\square$

Problema 2

Fie C_1 şi C_2 două cercuri care se intersectează în E şi în F şi având razele diferite. Notăm cu O_1 şi O_2 centrele cercurilor C_1, respectiv C_2 şi considerăm T_1T_2 o tangentă comună la cele două cercuri cu $T_1 \in C_1$ şi $T_2 \in C_2$. Arătaţi că dreptele T_1O_2, T_2O_1 şi EF sunt concurente dacă şi numai dacă unghiul O_1FO_2 este drept.

Alexandru Gîrban

Demonstraţie. Vom folosi următoarea proprietate bine cunoscută:
Dacă A, B, C, D sunt patru puncte distincte în plan (sau spaţiu), atunci $AC \perp BD$ dacă şi numai dacă $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

Fie $\{P\} = T_1O_2 \cap T_2O_1$. Vom arăta că $P \in EF \Leftrightarrow O_1F \perp O_2F$. Cum $EF \perp O_1O_2$, $P \in EF \Leftrightarrow PE \perp O_1O_2 \Leftrightarrow PO_1^2 + EO_2^2 = PO_2^2 + EO_1^2$. Dacă notăm razele cercurilor C_1 şi C_2 cu R_1, respectiv R_2, ultima relaţie se scrie

$$PO_1^2 - PO_2^2 = R_1^2 - R_2^2 \quad (*).$$

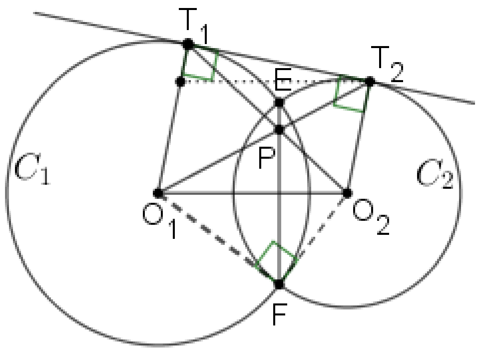
Cum $O_1T_1 \parallel O_2T_2$ (ambele perpendiculare pe T_1T_2), avem că $\Delta O_1PT_1 \sim \Delta T_2PO_2$, raportul de asemănare fiind $\frac{R_1}{R_2}$. Deducem că

$$PO_1^2 = \left(\frac{R_1}{R_1+R_2}\right)^2 \cdot O_1T_2^2 = \left(\frac{R_1}{R_1+R_2}\right)^2 \cdot (R_1^2 + T_1T_2^2).$$

Analog, $PO_2^2 = \left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)^2 \cdot (R_2^2 + T_1T_2^2)$. Astfel, relaţia $(*)$ este echivalentă cu

$$R_1^2 - R_2^2 = \frac{R_1^4 - R_2^4}{(R_1+R_2)^2} + \frac{(R_1^2 - R_2^2)T_1T_2^2}{(R_1+R_2)^2}.$$

Cum $R_1 \neq R_2$, ultima relaţie se scrie echivalent $(R_1+R_2)^2 = R_1^2+R_2^2+T_1T_2^2$, adică $T_1T_2^2 = 2R_1R_2$. Dar, ducând o paralelă prin T_2 la O_1O_2 se vede uşor că $T_1T_2^2 = O_1O_2^2 - (R_1 - R_2)^2$, deci relaţia $T_1T_2^2 = 2R_1R_2$ este echivalentă cu $O_1O_2^2 = R_1^2 + R_2^2 = O_1F^2 + O_2F^2$, deci cu $O_1F \perp O_2F$.



Altă demonstraţie a implicaţiei $\boxed{\Leftarrow}$

Dacă $O_1F \perp O_2F$, atunci O_1F este tangentă la C_2, deci puterea lui O_1 faţă de cercul C_2 este $R_1^2 = O_1T_1^2$. Asta arată că O_1 are aceeaşi putere faţă de C_2 şi cercul de diametru $[T_1T_2]$. Aşadar axa radicală a acestor două cercuri este O_1T_2. Analog se arată că axa redicală a cercului de diametru $[T_1T_2]$ şi a lui C_1 este O_2T_1. Atunci axele radicale ale acestor trei cercuri, O_1T_2, O_2T_1 şi EF, sunt concurente în centrul radical al celor trei cercuri.

Remarcă: Două cercuri secante care au proprietatea că tangentele în punctele comune sunt perpendiculare se numesc „ortogonale”.

Barem:

- demonstrarea implicaţiei $\boxed{\Rightarrow}$ . . . . $4p$
- demonstrarea implicaţiei $\boxed{\Leftarrow}$ . . . . $3p$

□

Problema 3

Determinaţi perechile (n, d) de numere naturale nenule care au proprietatea că, dintre orice $n + 2$ numere naturale se pot alege n cu suma divizibilă cu d.

Demonstraţie. Vom demonstra că singurele perechi care satisfac enunţul sunt cele de formele: $(k, 1)$, $(2k, 2)$ şi $(3k, 3)$, cu $k \in \mathbb{N}^*$.

Evident, orice pereche $(k, 1)$ are proprietatea din enunţ.

O pereche de forma $(n, 2)$ are proprietatea dorită dacă şi numai dacă n este par. Într-adevăr, din $n + 2$ numere impare, oricum am alege n, suma va fi impară, deci nedivizibilă cu 2. Dacă însa n este par, atunci oricum putem alege din $n + 2$ numere n cu suma pară. De exemplu, putem alege succesiv perechi de numere care au aceeaşi paritate până ce rămân numai două numere. Suma numerelor alese este pară.
O pereche de forma $(n, 3)$ are proprietatea dorită dacă şi numai dacă $3 \mid n$. Această condiţie este necesară, altminteri din $n + 2$ numere care dau restul 1 la împărţirea cu 3, oricum am alege n, suma va fi congruentă cu n modulo 3, deci nu va fi congruentă cu 0 modulo 3.
Pe de altă parte, din oricare 5 numere pot alege 3 cu suma divizibilă cu 3: dacă am trei numere care dau acelaşi rest la împărţirea cu 3, le aleg pe acelea; dacă am trei numere care dau resturi diferite la împărţirea cu 3, le aleg pe acelea. Ori cu siguranţă suntem în cel puţin una din aceste două situaţii. Astfel, din $n + 2 = 3k + 2$ numere pot succesiv sa aleg câte 3 cu suma divizibilă cu 3, până când rămân cu numai 2 numere. Suma numerelor alese este multiplu de 3.
În fine, nu există perechi convenabile de forma (n, d) cu $d \geq 4$. Într-adevăr, alegând 3 numere congruente cu 1 modulo d şi celelalte $n - 1$ divizibile cu d, oricum am alege n numere, suma lor va da unul din resturile 1, 2 sau 3 la împărţirea cu d, deci nu va fi divizibil cu d.

Remarcă: Este cunoscut următorul rezultat general:
Din oricare $2n - 1$ numere se pot extrage n care au suma divizibilă cu n.
Dacă în enunţ se înlocuieşte $2n - 1$ cu un număr mai mic, afirmaţia nu mai este adevărată.
Folosind acest rezultat, se poate demonstra că:
Afirmaţia „din oricare a numere întregi se pot extrage b cu suma divizibilă cu c” este adevărată dacă şi numai dacă $c \mid b$ şi $a \geq b + c - 1$. (*N.B. Vasiliev*, revista Kvant)

Barem:

- Condiţia $d \leq 3$ este necesară. .... $2p$
- Convin toate perechile $(k, 1)$ .... $1p$
- Dacă $d = 2$, este necesar ca $2 \mid n$ .... $1p$
- Convin toate perechile $(2k, 2)$ .... $1p$
- Dacă $d = 3$, este necesar ca $3 \mid n$ .... $1p$
- Convin toate perechile $(3k, 3)$ .... $1p$

□

Problema 4

În jurul unei mese rotunde sunt aşezate n persoane ($n \geq 3$) care joacă un joc. Iniţial, una dintre persoanele de la masă are n cărţi de joc, iar celelalte $n - 1$ persoane nu au nicio carte. La o mutare, unul dintre jucătorii care dispun de cel puţin două cărţi distribuie simultan două din cărţile sale, una către vecinul din dreapta, alta către vecinul din stânga. Atunci când nu se mai pot face mutări jocul se încheie.
a) Arătaţi că pentru $n = 7$ jocul se poate încheia.
b) Arătaţi ca pentru $n = 8$ jocul nu se poate încheia, adică va exista mereu cel putin o persoană care are cel puţin două cărţi.
c) Determinaţi valorile lui n pentru care jocul se poate încheia.

Demonstraţie. Vom demonstra că jocul se poate dacă şi numai dacă n este impar. Să demonstrăm mai întâi că dacă n este impar, jocul se poate termina. Jocul se termină atunci când fiecare jucător are exact o carte. Vom numi super-pas o succesiune de mutări care conduc de la configuraţia $(0, 1, \ldots, 1, 3, 1, \ldots, 1, 0)$ la configuraţia $(1, 0, 1, \ldots, 1, 3, 1, \ldots, 1, 0, 1)$. Mai întâi arătăm cum putem efectua un super-pas:
Pornim de la $(0, 1, 1, \ldots, 1, 3, 1, 1, \ldots, 1, 0)$. De aici se trece succesiv la
$(0, 1, 1, \ldots, 1, 2, 1, 2, 1, 1, \ldots, 1, 0)$, $(0, 1, 1, \ldots, 1, 2, 0, 3, 0, 2, 1, \ldots, 1)$,
$(0, 1, \ldots, 1, 2, 0, 1, 3, 1, 0, 2, 1, \ldots, 1, 0)$, $(0, 1, \ldots, 1, 2, 0, 1, 1, 3, 1, 1, 0, 2, 1, \ldots, 1, 0)$ şi aşa mai departe până când se ajunge la $(0, 1, 2, 0, 1, \ldots, 1, 3, 1, \ldots, 1, 0, 2, 1, 0)$, $(0, 2, 0, 1, \ldots, 1, 3, 1, \ldots, 1, 0, 2, 0)$, $(1, 0, 1, \ldots, 1, 3, 1, \ldots, 1, 0, 1)$.
Să demonstrăm prin inducţie după k că dacă avem $2k + 1$ jucători în linie (cerc neînchis), iar iniţial toate cărţile se află la jucătorul din mijloc (al $(k + 1)$-lea), se poate ajunge ca fiecare jucător să aibă exact o carte. Pentru 3 jucători este clar cum din configuraţia $(0, 3, 0)$ se ajunge dintr-o mutare la $(1, 1, 1)$ ceea ce încheie jocul. Presupunem afirmaţia adevărată în cazul a $2k-1$ jucători. Considerăm $2k + 1$ jucători, cu $2k + 1$ cărţi la jucătorul din mijloc. Folosind paşii de la cazul cu $2k - 1$ jucători, putem ajunge la configuraţia $(0, 1, 1, \ldots, 1, 3, 1, 1, \ldots, 1, 0)$. Cu un super-pas putem ajunge la $(1, 0, 1, \ldots, 1, 3, 1, \ldots, 1, 0, 1)$. Fixând 1-urile de la margine şi efectuând succesiv super-paşi pentru grupurile (tot mai scurte) de forma $(0, 1, \ldots, 1, 3, 1, \ldots, 1, 0)$ din mijloc ajungem la $(1, \ldots, 1, 0, 1, 3, 1, 0, 1, \ldots, 1)$. Apoi mutăm $(1, \ldots, 1, 0, 2, 1, 2, 1, 0, 1, \ldots, 1)$, $(1, \ldots, 1, 0, 3, 0, 1, \ldots, 1)$ şi $(1, 1, \ldots, 1)$.
Cu aceasta demonstraţia în cazul n impar se încheie.

Pentru a arăta că imparitatea lui n este o condiţie necesară, să ne uităm la persoanele care au un număr par de cărţi. Persoana care distribuie cărţi nu schimbă paritatea numărului de cărţi deţinute, numai cei doi care primesc cărţi îşi schimbă paritatea. În funcţie de paritatea numărului de cărţi deţinute de cei doi jucători care primesc cărţi la respectiva mutare, numărul celor care au un număr par de cărţi poate creşte cu 2, scădea cu 2 sau rămâne neschimbat. Aşadar, paritatea numărului de jucători care au un număr par de cărţi este un invariant. Dacă n este par, iniţial sunt n jucători care au un număr par de cărţi, iar la final ar trebui să fie 0 persoane cu un număr par de cărţi. Dar n şi 0 sunt de parităţi diferite, deci dacă n este par, jocul nu se poate termina.

Altă tratare a cazului cu n par
În continuare vom demonstra că în cazul n par jocul nu se poate termina. Presupunem contrariul. Fie $n = 2j$, $j \in \mathbb{N}$. Numerotăm jucătorii, în ordinea de la masă, de la 0 la $2j - 1$, jucătorul 0 fiind cel care iniţial are toate cărţile. Notăm cu a_k numărul de mutări (de la începutul jocului până când acesta se termină) în care jucătorul k le-a dat câte o carte vecinilor săi. Avem atunci relaţiile: $a_{2j-1} + a_1 - 2a_0 = 1 - 2j$ (primind câte o carte la fiecare mutare efectuată de vecinii săi, jucătorii 1 şi $2j - 1$ şi dând mereu câte 2 cărţi la fiecare mutare efectuată de sine însuşi, jucătorul 0 va avea la final cu $2j - 1$ mai puţine cărţi decât la început), $a_0 + a_2 - 2a_1 = 1$, $a_1 + a_3 - 2a_2 = 1$, ..., $a_{2j-2} + a_0 - 2a_{2j-1} = 1$. (Toţi ceilalţi jucătorii vor avea la sfârşit cu o carte mai mult decât au avut la început.) Putem rescrie aceste relaţii astfel:

$$\begin{aligned} a_0 - a_1 &= a_1 - a_2 + 1 \\ a_1 - a_2 &= a_2 - a_3 + 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots &\ \ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{2j-2} - a_{2j-1} &= a_{2j-1} - a_0 + 1 \\ a_{2j-1} - a_0 &= a_0 - a_1 + 1 - 2j \end{aligned}$$

Dacă $a_0 - a_1 = N$, obţinem succesiv $a_1 - a_2 = N - 1$, $a_2 - a_3 = N - 2$, $\ldots$, $a_{2j-1} - a_0 = N - (2j - 1)$. Adunând aceste $2j$ relaţii obţinem $0 = 2jN - (0 + 1 + 2 + \ldots + (2j - 1))$, de unde $2jN = j(2j - 1)$,

deci N nu este număr natural.
Contradicţia obţinută arată că jocul nu se poate termina.

O altă idee, preluată de la o problemă similară din Engel
Numerotăm jucătorii, în ordinea de la masă, de la 1 la n şi notăm cu x_k numărul de cărţi deţinute de jucătorul k. Atunci valoarea sumei $1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + \ldots + n \cdot x_n$ este invariantă modulo n. Într-adevăr, dacă jucătorul j distribuie cărţi vecinilor săi, $j-1$ şi $j+1 \pmod{n}$, suma de mai sus nu se modifică, exceptând cazul că distribuitorul de cărţi este jucătorul 1 (caz în care valoarea expresiei creşte cu n) sau n (caz în care valoarea expresiei scade cu n). Oricum, expresia nu se modifică modulo n. Iniţial, valoarea modulo n a expresiei este 0. La final, expresia valorează $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ care este congruent cu 0 modulo n numai dacă n este impar. Aşadar, pentru n impar, acest invariant arată că jocul nu se poate termina.

Barem:

- a) 1p
- b) 1p
- Pentru orice n impar jocul se poate încheia. 2p
- Pentru niciun n par jocul nu se poate încheia. 3p

$\square$

Timp de lucru: 240 de minute.
Pentru fiecare problemă se acordă maxim 7 puncte.
Nu este permisă utilizarea calculatorului sau a oricărui alt instrument, cu excepția riglei și a compasului.