Problema săptămânii 384

În jurul unei mese rotunde sunt aşezate 25 de persoane, fiecare persoană având două cartonaşe. Pe fiecare cartonaş este scris unul dintre numerele $1, 2, \ldots, 25$, fiecare număr figurând pe exact două cartonaşe. La un semnal, fiecare jucător transmite un cartonaş, cel pe care este scris numărul mai mic, persoanei aflate imediat în dreapta sa. Arătaţi că, mai devreme sau mai târziu, cineva va avea două cartonaşe cu acelaşi număr.

Olimpiadă Leningrad, 1988

Soluţie: Să presupunem contrariul, anume că jocul poate continua la nesfârşit fără ca vreo persoană să aibă două cartonaşe identice. Atunci cartonaşele pe care stă scris numărul 25 se află la două persoane diferite şi vor rămâne pe veci la acestea. Cele două cartonaşe cu numărul 24, chiar dacă eventual în primele două ture ale jocului se află la un jucător care are şi 25, ajung ca la tura a 3-a să se afle în posesia unor jucători care nu au cartonaşe mai mari, deci ele vor rămâne fixe. Continuăm raţionamentul: cartonaşele cu numărul 23 se pot afla numai la primele câteva ture la jucători care au şi cartonaşe mai mari, deci la un moment dat ele vor rămâne fixe la posesorii lor. La fel, la un moment dat toate cartonaşele cu număr mai mare sau egal cu 14 vor rămâne fixe. În acest moment, toate cartonaşele cu număr mai mare sau egal cu 14 (24 de cartonaşe) vor fi fixe la 24 de persoane. O singură persoană de la masă, s-o numim A, nu dispune de niciun cartonaş cu număr mai mare sau egal cu 14. Ne uităm acum la cele două cartonaşe cu numărul 13. Ele sunt automat pasate mai departe de toţi cei 24 de jucători care au cartonaşe cu numere mai mari, până când ele ajung la A. După ce primul dintre cartonaşele cu numărul 13 ajunge la A, el rămâne acolo. După cel mult 24 de mutări va ajunge acolo şi celălalt cartonaş cu numărul 13, astfel că am contrazis presupunerea iniţială potrivit căreia jocul poate continua la nesfârşit fără ca vreun jucător să aibă două cartonaşe identice. Aşadar, mai devreme sau mai târziu, cineva va avea două cartonaşe identice.

Remarcă: Afirmaţia este adevărată pentru orice număr impar de persoane. Dacă numărul persoanelor de la masă este par, $2n$, atunci concluzia nu rămâne adevărată: de exemplu, dacă toate persoanele de la masă au un cartonaş cu un număr mare (mai mare ca n) şi unul cu un număr mic (cel mult n), toată lumea va pasa cartonaşul cu numărul mic şi va avea mereu două cartonaşe diferite, unul cu un număr mare şi unul cu un număr mic.

Am primit soluţii de la: *Gheorghe Iurea, Ioana Vlădoiu* şi *Cristian Muth.*

Problem of the week no. 384

There are 25 people sitting around a table, and each person has two cards. One of the numbers $1, 2, 3, \ldots, 25$ is written on each card, and each number occurs on exactly two cards. At a signal, each person passes one of his cards, the one with the smaller number, to his right-hand neighbor. Prove that, sooner or later, one of the players will have two cards with the same number.

Leningrad Mathematical Olympiad, 1988

Solution: Let us assume the contrary to be true, namely that the game could go on forever without anyone ever holding two identical cards. The cards on which the number 25 is written are at two different players and they can never move. Next, we look at the two cards with the number 24 written on them. They will only move if they are in the possession of someone also holding a 25. This could occur only in the first two rounds. After that, the cards with 24 will get to someone who will never have a card with more than 24 on it, so the two cards with 24 on them will not move after round 2. Next, we look at the cads with 23 on them. They could only move in the first few rounds, so afterwards they will no longer change hands. In the same way, it is easy to see that each of the cards with numbers $25, 24, 23, \ldots, 14$ written on them will eventually get to someone for whom this is the largest card, with all the larger cards no longer in motion. So all these 24 cards will stay (at some point) fixed in the possession of 24 different owners. There is only one player, say A, not holding any of these cards. Finally, let us examine the faith of the two cards on which have the number 13 written on them. Each of the 24 players holding cards with larger numbers will keep passing these cards on, until they arrive at A. As A does not have larger cards, A will hold on to the first of the cards with 13 written on them, until the second card with 13 also arrives to him. Thus, A gets to have two identical cards, which contradicts our initial assumption. We conclude that, sooner or later, someone will get to have to identical cards.

Remark: The statement of the problem remains true for any odd number of players. If the number of the players is even, the statement is no longer true. If there are $2n$ players, each of them holding a card with a large number (larger than n) and a card with a small number (at most n), everyone will keep holding on to the card with the large number and passing on the card with the small number. Thus, each player will always hold two different cards, one with a large number and one with a small number.