Problema săptămânii 382

Numerle reale x, y satisfac relaţiile $x^2 \geq y$ şi $y^2 \geq x$. Arătaţi că

$$\frac{x}{y^2+1} + \frac{y}{x^2+1} \leq 1.$$

Festivalul matematic, Kiev, 2017

Soluţie: (user AoPS *RagvaloD*)
Trebuie să demonstrăm că $x^3+x+y^3+y \leq x^2y^2+x^2+y^2+1$, inegalitate care revine la $2(x^2y^2+x^2+y^2+1)-2(x^3+x+y^3+y) = 2(x^2-y)(y^2-x)+(x-1)^2+(y-1)^2+(x-y)^2 \geq 0$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x = y = 1$.

Am primit soluţii de la: *Titu Zvonaru, Marius-Valentin Drăgoi, Gheorghe Iurea* şi *Marian Cucoaneş.*

Problem of the week no. 382

Real numbers x, y satisfy $x^2 \geq y$ and $y^2 \geq x$. Prove that

$$\frac{x}{y^2+1} + \frac{y}{x^2+1} \leq 1.$$

Kyiv mathematical festival, 2017

Solution: (AoPS user *RagvaloD*)
We need to prove $x^3+x+y^3+y \leq x^2y^2+x^2+y^2+1$ which is equivalent to $2(x^2y^2+x^2+y^2+1)-2(x^3+x+y^3+y) = 2(x^2-y)(y^2-x)+(x-1)^2+(y-1)^2+(x-y)^2 \geq 0$. Equality holds for $x = y = 1$.