Problema săptămânii 380

Ana şi Bogdan joacă un joc pe o tablă dreptunghiulară 3×2023 iniţial albă. Jucătorii mută alternativ; prima mută Ana. La o mutare, jucătorul aflat la mutare trebuie să coloreze cu negru două pătrăţele albe, nu neapărat adiacente, dar situate fie pe aceeaşi linie, fie pe aceeaşi coloană. Pierde jucătorul care nu mai poate muta. Care din cei doi jucători are o strategie câştigătoare?

Soluţie:
Vom arăta că Bogdan este cel care câştigă.
Jocul se poate termina în una din următoarele două poziţii:
1. pe tablă au rămas 3 pătrăţele albe situate pe linii şi coloane diferite;
2. pe tablă a rămas un singur pătrăţel alb.
Vom demonstra că Bogdan poate face în aşa fel încât jocul să se încheie în situaţia 2. Pe tablă sunt 6069 de pătrăţele. Dacă pe tablă rămân la final 3 pătrăţele albe, se fac 3033 de mutări (număr impar de mutări), deci ultima mutare este a Anei. Dacă pe tablă rămâne la final un singur pătrăţel alb, se fac 3034 de mutări (număr par), deci ultima mutare este a lui Bogdan. Aşadar Bogdan câştigă dacă reuşeşte să înnegrească complet o linie.

Strategia lui Bogdan este de a alege o linie şi a o înnegri lăsând mereu un număr par de coloane complet albe.
Primul pas.
Dacă Ana, la prima ei mutare, înnegreşte două pătrăţele situate pe o aceeaşi coloană, să zicem cele de pe liniile 1 şi 2 ale coloanei 1, Bogdan alege să înnegrească complet linia 1 şi începe prin a colora pătrăţele situate linia 1, pe coloanele 2 şi 3. El lasă 2020 de coloane coloane complet albe, linia 1 fiind complet neagră în rest.
Dacă Ana, la prima ei mutare, înnegreşte două pătrăţele situate pe o aceeaşi linie, să îi zicem linia 1, pe coloanele 1 şi 2, Bogdan alege să înnegrească complet linia 1 şi începe prin a colora două pătrăţele de pe coloana 3, cel de pe linia 1 şi încă unul. El lasă 2020 de coloane coloane complet albe, linia 1 fiind complet neagră în rest.
Pe parcursul jocului:
Bogdan a lăsat după cea de-a k-a mutare a sa $2k+1$ pătrăţele negre pe linia 1 şi celelalte $2023-(2k+1)$ coloane complet albe.
Urmează Ana. Dacă Ana nu colorează niciun pătrăţel al liniei 1, atunci Bogdan poate colora două noi pătrăţele de pe linia 1 lăsând restul coloanelor complet albe. Într-adevăr, în mutarea ei, Ana a putut să murdărească maxim două coloane dintre cele care erau complet goale, caz în care Bogdan va alege să înnegrească pe linia 1 cu prioritate tocmai pătrăţelele (unul sau două) situate pe coloanele murdărite de Ana.
Dacă Ana colorează două pătrăţele de pe linia 1, Bogdan colorează pătrăţelele situate pe aceleaşi coloane dar pe linia 2.
Dacă Ana colorează un pătrăţel pe linia 1 şi un altul pe aceeaşi coloană, Bogdan va face la fel.
Astfel, Bogdan va face ca mereu ca, după k mutări ale sale, pe linia 1 să fie $2k+1$ pătrăţele negre, iar restul coloanelor să fie complet albe.

După 1011 mutări, Bogdan va termina de colorat linia 1, după care el va muta la întâmplare, deoarece jocul se va termina cu siguranţă după 3034 de mutări, cu victoria lui Bogdan.

Remarcă:
Absolut analog se arată că Bogdan câştigă pe orice tablă $3 \times (4k + 3)$. Pe o tablă $3 \times (4k + 1)$ Ana câştigă cu exact aceeaşi strategie: interesul ei este să se facă $6k + 1$ mutări şi să rămână un singur pătrăţel alb. Ea va începe prin a înnegri două pătrăţele situate pe o aceeaşi coloană. Va alege una din liniile pe care a înnegrit deja un pătrăţel şi, la fiecare mutare a ei va spori cu 2 numărul de pătrăţele negre de pe linia aleasă, lăsând totodată restul coloanelor complet albe.

Am primit soluţie de la *Ioana Vlădoiu*.

Problem of the week no. 380

Alice and Bob play a game on a 3×2023 board, initially white. The two players alternate moves, the first to move being Alice. The player on turn has to paint black two white unit squares. The two squares do not need to be adjacent but have to be either on the same row or on the same column. The player that cannot move loses the game. Which of the two players has a winning strategy?

Solution: We prove that Bob has a winning strategy.
The game can end in one of the following two positions:
1. on the board there are 3 white squares situated in three different lines and three different column;
2. on the board there is only one white square.
We prove that Bob has a strategy that makes the game finish with only one white square on the board.
On the board there are 6069 squares. If the games ends with 3 squares on the board, there were 3033 moves made (i.e. an odd number), therefore the last move was Alices's. On the other hand, if there is only one white square remaining on the board, there were 3034 moves made (an even number), so the last move is Bob's. Thus, Bob wins if he manages to paint black all the squares of a row.

Bob's strategy is to pick a row, turn it black by always leaving an even number of completely white columns.
The first step. If Alice, on her first move, colors two squares of some row, say row 1, Bob chooses to turn black the row 1 and his first move is to turn black another square of row 1 (and some other square of that column). If Alice, on her first move, colors two squares of some column, situated on lines 1 and 2 (we can always label the lines that way), Bob chooses to turn black row 1 and his first move is to color black two

squares of row 1. Thus, after his first move, there are 3 black squares on row 1, and the remaining 2020 columns are completely white.
Throughout the game:
After his k-th move, Bob has left $2k + 1$ black squares on row 1, while all the other $2023 - (2k + 1)$ columns are completely white.
Up next is Alice. If Alice does not color any squares of the row 1, then Bob can color two new squares on that row, leaving the other column completely white. Indeed, on her move, Alice can turn black some squares situated on at most two of the completely white columns. Thus, choosing with priority the squares situated on the white columns, he can insure that after his move number $k+1$, there are $2k+3$ black squares on row 1, and $(2023 - (2k + 3)$ completely white columns.
If Alice colors two squares on row 1, Bob colors the squares of row 2 on the same two columns.
If Alice colors one square of row 1 and another on the same column, so will Bob.
After 1011 of his moves, Bob will finish coloring row number 1, after which he will continue to move randomly, awaiting the end of the game and his victory.

Remark:
The reasoning (and answer) is the same on any $3 \times (4k + 3)$ board. On a $3 \times (4k + 1)$ board, it is Alice who has the same winning strategy. Now it is her interest to completely color a row. Indeed, she wants the game to end with one white square on the board, after $6k + 1$ moves. She will start by coloring two squares on the same column. After that, she chooses one of the two rows on which there is a black square and she continues to turn black two of the squares of this line, always keeping an even number of completely white columns.