Problema săptămânii 379

Determinaţi toate tripletele (a, b, c) de numere naturale nenule pentru care

$$2^a + 3^b + 1 = 6^c.$$

Olimpiadă Japonia, 2014

Soluţie: Dacă $a, c \geq 3$ ecuaţia nu poate fi verificată modulo 8. Într-adevăr, în acest caz $2^a \equiv 6^c \equiv 0 \pmod 8$, iar $3^b \equiv 1 \pmod 8$ sau $3^b \equiv 3 \pmod 8$ după cum b este par sau impar. În orice caz, ecuaţia nu are soluţii cu $a, c \geq 3$.
Dacă $c = 1$, din $2^a + 3^b = 5$ rezultă imediat $a = b = 1$, deci o soluţie este $(1, 1, 1)$.
Dacă $c = 2$, din $2^a + 3^b = 35$ rezultă $b \leq 3$. Pentru $b = 1$ rezultă $a = 5$, pentru $b = 2$ nu obţinem a natural, iar pentru $b = 3$ obţinem $a = 3$. Aşadar, găsim soluţiile $(3, 3, 2)$ şi $(5, 1, 2)$.
În continuare analizăm cazul în care $c \geq 3$, iar $a < 3$.
Dacă $a = 1$, ecuaţia revine la $3^b + 3 = 6^c$. Dar $c \geq 3$ implică $b > 2$ şi atunci egalitatea $3^b + 3 = 6^c$ nu poate avea loc modulo 9.
Dacă $a = 2$, ecuaţia revine la $3^b + 5 = 6^c$, imposibilă modulo 3.
În concluzie, singurele soluţii sunt $(1, 1, 1)$, $(3, 3, 2)$ şi $(5, 1, 2)$.

Remarcă: Dacă se renunţă în enunţ la condiţia ca a, b, c să fie nenule, ecuaţia mai are în plus şi soluţia $(2, 0, 1)$.

Am primit soluţii de la: *Cristian Vergelea, Titu Zvonaru, Eric-Dimitrie Cismaru, Cristian Muth, Ioana Vlădoiu, Gheorghe Iurea, Ioan Viorel Codreanu, Maria Ciucu* şi *Maria Gorgan.*

Problem of the week no. 379

Find all ordered triplets of positive integers (a, b, c) such that $2^a + 3^b + 1 = 6^c$.

Japan MO, 2014

Solution: If $a, c \geq 3$. the equality is not satisfied modulo 8. Indeed, in this case $2^a \equiv 6^c \equiv 0 \pmod 8$, while $3^b \equiv 1 \pmod 8$ or $3^b \equiv 3 \pmod 8$ depending on whether b is even or odd. Thus, there ar no solutions with $a, c \geq 3$.
If $c = 1$, from $2^a + 3^b = 5$ we get $a = b = 1$, so one solution is $(1, 1, 1)$.
If $c = 2$, from $2^a + 3^b = 35$ it follows that $b \leq 3$. For $b = 1$ we get $a = 5$, for $b = 2$ we do not get an integer value for a, while for $b = 3$ we get $a = 3$. Thus, the solutions in this case are $(3, 3, 2)$ and $(5, 1, 2)$.
In the sequel we analyze the case when $c \geq 3$, while $a < 3$.
If $a = 1$, the equation becomes $3^b + 3 = 6^c$. But $c \geq 3$ requires $b > 2$, in which case the equality $3^b + 3 = 6^c$ does not hold modulo 9.
If $a = 2$, the equation becomes $3^b + 5 = 6^c$, impossible modulo 3.
In conclusion, the only equations are $(1, 1, 1)$, $(3, 3, 2)$ and $(5, 1, 2)$.