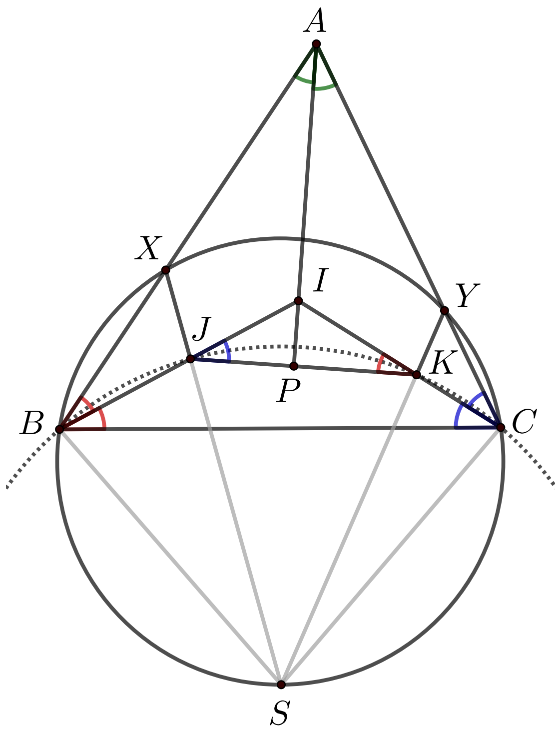
Problema săptămânii 377

Fie X şi Y puncte pe laturile AB, respectiv AC ale triunghiului ABC astfel ca punctele B, X, Y, C să fie conciclice, şi fie I, J, K centrele cercurilor înscrise în triunghiurile ABC, XBC, respectiv YBC. Arătaţi că dreptele AI şi JK sunt perpendiculare.

Trinh Quoc Khanh, Crux Mathematicorum, pb. 4559 (june 2023)

Soluţie: Fie S mijlocul arcului BC al cercului circumscris patrulaterului $BCYX$, punctul în care bisectoarele $(XJ$ şi $(YK$ intersectează respectivul cerc. Din incenter-excenter lemma se ştie că $SB = SJ = SK = SC$, ceea ce arată că patrulaterul $BCKJ$ este inscriptibil (într-un cerc cu centrul în S). Dacă notăm $\{P\} = AI \cap JK$, deducem că $\sphericalangle IJP = \sphericalangle ICB = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle C$. Pe de altă parte, $\sphericalangle JIP = \sphericalangle ABI + \sphericalangle BAI = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle B + \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle A$, deci $\sphericalangle IPJ = 180^\circ - \sphericalangle IJP - \sphericalangle JIP = 180^\circ - \frac{1}{2}(\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C) = 90^\circ$.



Remarcă:
Faptul că patrulaterul $BCKJ$ este inscriptibil se poate demonstra şi altfel: cum J şi K sunt centrele cercurilor înscrise în triunghiurile BXC, respectiv BYC, avem $\sphericalangle BJC = 90^\circ + \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle BXC$ şi $\sphericalangle BKC = 90^\circ + \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle BYC$. Dar $\sphericalangle BXC = \sphericalangle BYC$ ($BCYX$ este inscriptibil), deci $\sphericalangle BJC = \sphericalangle BKC$.

Remarcă: (pe baza rezolvărilor trimise de *Cristian Muth* şi *David Mathe*)
Dacă $\{Z\} = XY \cap BC$, se ştie că bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BAC$ şi $\sphericalangle XZB$ sunt perpendiculare; rezultă că bisectoarea unghiului $\sphericalangle XZB$ este paralelă cu JK.
Dacă notăm cu L şi M centrele cercurilor înscrise în triunghiurile XYC, respectiv XYB, analog rezultă că $LM \parallel JK$, ambele paralele cu bisectoarea $\sphericalangle XZB$, şi $KL \parallel JM \parallel AI$, deci $JKLM$ este dreptunghi.

Tocmai am demonstrat *Teorema japoneză pentru patrulatere inscriptibile.*

Am primit soluţii de la: *Eric-Dimitrie Cismaru, Ioana Vlădoiu, Titu Zvonaru, Maria Ciucu, Gheorghe Iurea, Ana Paciu, Maria Gorgan, Cristian Muth* şi *David Mathe.*

Problem of the week no. 377

Given a triangle ABC, a point X on segment AB and a point Y on segment AC, such that B, X, Y, C are concyclic, let I, J, K be the incenters of triangles ABC, XBC, and YBC, respectively. Prove that AI is orthogonal to JK.

Trinh Quoc Khanh, Crux Mathematicorum, pb. 4559 (june 2023)

Let S be the midpoint of the arc BC of the circumcircle of $BCYX$, the point where bisectors $(XJ$ and $(YK$ meet the circle. From the incenter-excenter lemma it is known that $SB = SJ = SK = SC$, which means that quadrilateral $BCKJ$ is cyclic (its circumcenter being S). If $\{P\} = AI \cap JK$, it follows that $\sphericalangle IJP = \sphericalangle ICB = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle C$. On the other hand, $\sphericalangle JIP = \sphericalangle ABI + \sphericalangle BAI = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle B + \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle A$, hence $\sphericalangle IPJ = 180° - \sphericalangle IJP - \sphericalangle JIP = 180° - \frac{1}{2}(\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C) = 90°$.