

STELELE MATEMATICII, 2023 — Juniori

Problema 1. Determinați toate perechile (p, q) de numere prime, pentru care $p^2 + 5pq + 4q^2$ este pătratul unui număr întreg.

Problema 2. Un triunghi este descompus într-un număr finit de triunghiuri cu interioarele disjuncte două câte două, ale căror laturi au lungimi impare. Arătați că perimetrul triunghiului este un număr întreg de aceeași paritate cu numărul de triunghiuri din descompunere.

(Triunghiurile din descompunere pot avea unul sau mai multe vârfuri pe bordul triunghiului mare, iar laturile lor se pot suprapune parțial.)

Problema 3. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, în care $AB < AC$, și fie D un punct variabil în interiorul laturii AB . Paralela prin D la BC intersectează AC în E . Mediatoarea segmentului DE intersectează latura BC în F . Cercurile BDF și CEF se intersectează a doua oară în K . Arătați că dreapta FK trece printr-un punct fix.

Problema 4. Determinați toate numerele întregi $n \geq 3$ care au următoarea proprietate: Există n numere reale a_1, a_2, \dots, a_n , distincte două câte două, astfel încât cele $\frac{1}{2}n(n-1)$ sume $a_i + a_j$, $1 \leq i < j \leq n$, ordonate crescător, fie ele $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_{\frac{n(n-1)}{2}}$, să satisfacă relația $s_2 - s_1 = s_3 - s_2 = \dots = s_{\frac{n(n-1)}{2}} - s_{\frac{n(n-1)}{2}-1}$.