Problema săptămânii 376

Doi jucători, A şi B, joacă un joc cu 11 cutii, iniţial goale. La o mutare, jucătorul aflat la mutare alege 10 din cele 11 cutii şi pune în fiecare din cutiile alese câte o monedă. Cei doi jucători mută alternativ, primul mutând A. Câştigă jucătorul care prin mutarea sa face ca într-una din cutii să fie exact 21 de monede. Care din cei doi jucători are strategie de câştig?

Olimpiadă Auckland, 2022

Soluţie: Vom arăta că B are strategie câştigătoare.
Să etichetăm cu $1, 2, \dots, 10$ cutiile alese de A la prima lui mutare. În continuare, B, la mutarea k ($1 \leq k \leq 10$) va pune câte o monedă în fiecare cutie cu excepţa cutiei k. Astfel, B se asigură că nicio cutie nu a fost aleasă de 21 de ori în primele 21 de mutări şi, deci, că jocul nu se încheie după 21 de mutări (adică după cea de-a 11 mutare a lui A). Pe de altă parte, în primele 21 de mutări, în cutii au fost plasate în total 210 monede. Există sigur cel puţin o cutie cu 20 de monede în ea, în caz contrar în cutii ar fi cel mult $11 \cdot 19 = 209 < 210$ monede. Alegând o cutie cu 20 de monede (şi încă 9 la întâmplare), B va câştiga la cea de 11-a sa mutare.

Am primit soluţii de la: *Titu Zvonaru, Cristian Vergelea, Cristian Muth, Gheorghe Iurea, David Mathe* şi *Ioana Vlădoiu.*

Problem of the week no. 376

There are 11 empty boxes. In one move, a player can put one coin in each of some 10 boxes. Two people play, taking turns. The winner is the player after whose move in one of the boxes there will be 21 coins. Who has a winning strategy?

Auckland MO, 2022

Solution: We prove that B has a winning strategy.
Label with $1, 2, \dots, 10$ the boxes chosen by A in his first move. Next, B, on his k-th move, ($1 \leq k \leq 10$) will put one coin in each box except for the box with label k. Thus, B makes sure that no box has been chosen 21 times in the first 21 moves, i.e. the game does not end after move number 21 (after A's 11-th move). On the other hand, during the first 21 moves, a total of 210 coins have been put into the boxes. There must be a box which, after mve 21, contains exactly 20 coins, otherwise the boxes would contain at most $11 \cdot 19 = 209 < 210$ coins. Choosing a box with 20 coins (and 9 other random boxes), B will win on his 11-th move.