Problema săptămânii 374

Determinaţi valoarea minimă a expresiei $(x+y)(y+z)$, dacă x, y, z sunt numere reale pozitive care verifică ecuaţia $xyz(x+y+z)=1$.

Olimpiadă URSS, 1989

Soluţia 1:
Din inegalitatea mediilor avem

$$(x+y)(y+z)=xz+(y^2+xy+yz)\geq 2\sqrt{xz\cdot(y^2+yx+yz)}=2\sqrt{xyz(x+y+z)}=2.$$

Egalitatea are loc dacă $xz=y(x+y+z)=1$, adică $x, z>0$ verifică $xz=1$, iar y este soluţia pozitivă a ecuaţiei $y^2+(x+z)y-1=0$, adică $y=\dfrac{-x-z+\sqrt{(x+z)^2+4}}{2}$.
Aşadar, valoarea minimă este 2.

Soluţia 2:
Condiţia din enunţ implică $y^2=\dfrac{1-xyz(x+z)}{xz}$, deci $y^2+y(x+z)+xz=\dfrac{1}{xz}+xz\geq 2$, cu egalitate dacă $xz=1$ şi y e soluţia pozitivă a ecuaţiei $y^2+(x+z)y-1=0$.

Remarcă: (*Gheorghe Iurea*)
Se poate arăta că, în condiţiile date, expresia ia orice valoare ≥ 2.

Îi mulţumesc lui *Titu Zvonaru* pentru semnalarea sursei problemei.

Am primit soluţii de la: *Cristian Vergelea, Eric-Dimitrie Cismaru, Muth Cristian, David Mathe, Ioana Vlădoiu, Gheorghe Iurea* şi *Titu Zvonaru.*

Problem of the week no. 374

Find the least value of the expression $(x+y)(y+z)$, under the condition that x, y, z are positive numbers satisfying the equation $xyz(x+y+z)=1$.

All Soviet Union MO, 1989

Solution 1:
From the AM-GM we get

$$(x+y)(y+z)=xz+(y^2+xy+yz)\geq 2\sqrt{xz\cdot(y^2+yx+yz)}=2\sqrt{xyz(x+y+z)}=2.$$

Equality holds if $xz=y(x+y+z)=1$, i.e. $x, z>0$ satisfy $xz=1$, and y is the positive solution of the equation $y^2+(x+z)y-1=0$, $y=\dfrac{-x-z+\sqrt{(x+z)^2+4}}{2}$.

Thus, the minimum value is 2.

Solution 2:

The given constraint can be written $y^2 = \dfrac{1 - xyz(x+z)}{xz}$, i.e. $y^2 + y(x+z) + xz = \dfrac{1}{xz} + xz \geq 2$, with equality if $xz = 1$ and y and y is the positive solution of the equation $y^2 + (x+z)y - 1 = 0$.