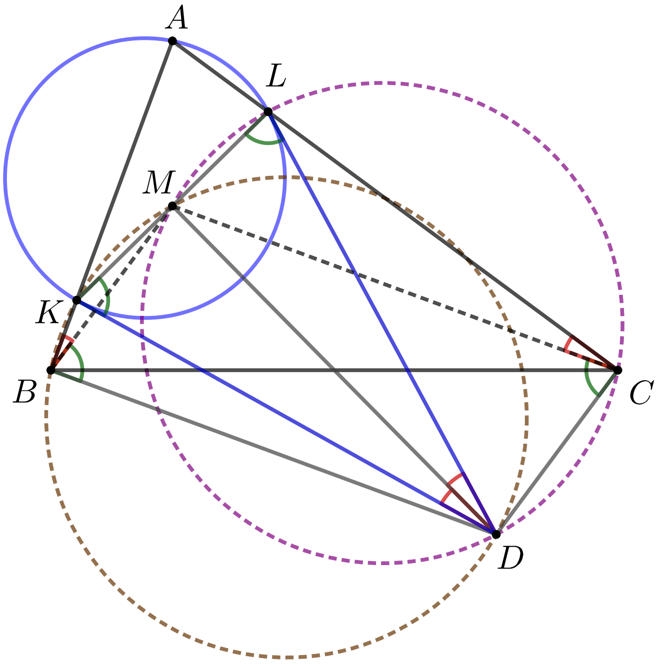
Problema săptămânii 373

Considerăm un triunghi ascuţitunghic ABC. Fie D punctul diametral opus lui A pe cercul circumscris triunghiului. Presupunem că punctele K şi L sunt situate pe segmentele $[AB]$, respectiv $[AC]$ aşa încât DK şi DL sunt tangente la cercul circumscris triunghiului AKL. Arătaţi că dreapta KL trece prin ortocentrul triunghiului ABC.

EGMO, 2023

Soluţie: Fie M mijlocul segmentului $[KL]$. Vom demonstra că M este ortocentrul triunghiului ABC, de unde va rezulta concluzia.
Deoarece $DK = DL$ (tangente din D la cercul circumscris triunghiului AKL), triunghiul DKL este isoscel, deci mediana DM este şi înălţime. Pe de altă parte, $[AD]$ este diametru în cercul circumscris, deci $\sphericalangle ABD = 90°$. Deducem că B şi M se află pe cercul de diametru $[KD]$, adică patrulaterul $BDMK$ este inscriptibil. Atunci $\sphericalangle ABM = \sphericalangle KDM = 90° - \sphericalangle LKD = 90° - \sphericalangle BAC$ (DK fiind tangentă la cercul circumscris lui AKL, unghiurile $\sphericalangle DKL$ şi $\sphericalangle KAL$ subîntind acelaşi arc, KL). De aici rezultă că M se află pe înălţimea din B a triunghiului ABC. Analog se arată că M se află şi pe înălţimea din C, deci este ortocentrul triunghiului.



Remarcă: Ce motivează considerarea punctului M, mijlocul lui $[KL]$?
Se ştie că $(AH$ şi $(AO$ sunt izogonale în unghiul $\sphericalangle BAC$. Pe de altă parte, se ştie că $(AD$ este simediană în triunghiul AKL. Rezultă că $(AH$ trece prin mijlocul lui $[KL]$. Astfel, concluzia revine la a arăta că M este ortocentrul triunghiului ABC.

Sunt multe soluţii pe site-ul oficial al competiţiei, la paginile 7-13.

Am primit soluţii de la: *Eric-Dimitrie Cismaru, David Mathe, Titu Zvonaru, Cristian Muth, Ioana Vlădoiu* şi *Gheorghe Iurea.*

Problem of the week no. 373

We are given an acute triangle ABC. Let D be the point on its circumcircle such that AD is a diameter. Suppose that points K and L lie on segments AB and AC, respectively, and that DK and DL are tangent to circle AKL. Show that line KL passes through the orthocenter of triangle ABC.

EGMO, 2023

There are many solutions on the official site of the competition, see pages 7-13.