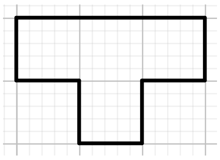
Problema săptămânii 372

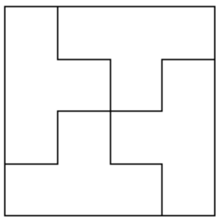
Dispunem de o tablă 2022×2022 împărţită în pătrăţele unitate şi dorim să plasăm pe ea dale de forma de mai jos



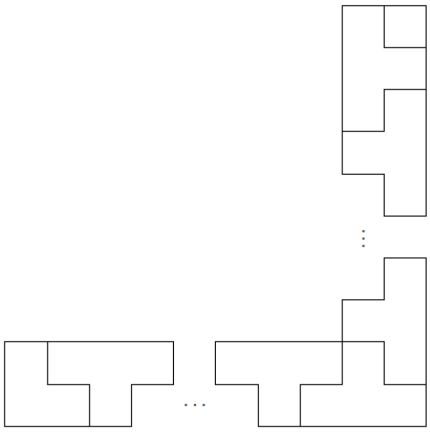
formate din 4 pătrăţele unitate astfel încât fiecare pătrăţel al dalei să se suprapună peste câte unul din pătrăţelele unitate ale tablei. Dalele pot fi rotite, dar nu se pot suprapune. Care este numărul maxim de dale pe care le putem plasa?

Olimpiadă Filipine, 2020

Soluţie: Suprafaţa tablei are aria 2022^2, iar o dală are aria 4, deci pe tablă se pot plasa cel mult $2022^2 : 2^2 = 1011^2$ dale.
Vom demonstra că nu se pot plasa 1011^2 dale, însă se pot plasa $1011^2 - 1$, prin urmare, numărul maxim este $1011^2 - 1 = 1022120$.
Presupunem că pe tablă s-ar putea plasa 1011^2 dale. Colorăm tabla ca pe o tablă de şah. Dimensiunea tablei fiind pară, pe tablă vor fi la fel de multe pătrăţele albe ca şi pătrăţele negre. Pe de altă parte, o dală acoperă fie trei pătrăţele albe şi unul negru, fie, invers, trei pătrăţele negre şi unul alb. Dacă notăm cu a numărul numărul dalelor cu 3 pătrăţele albe şi cu b numărul dalelor cu trei pătrăţele negre folosite la pavare, am avea $3a + b = 2022^2 : 2$ pătrăţele albe şi $a + 3b = 2022^2 : 2$ pătrăţele negre. Din $3a + b = a + 3b$ rezultă $a = b$. Pe de altă parte $a + b = 1011^2$ este impar, contradicţie. Aşadar tabla nu poate fi pavată cu 1011^2 dale.
În continuare prezentăm o cale de a plasa $1011^2 - 1$ dale. (Există şi alte căi.)
Din patru dale se poate forma un pătrat 4×4 ca în figura de mai jos.



Din pătrate 4×4 se poate forma un pătrat 2020×2020 complet pavat cu dale. Îl plasăm în colţul din stânga sus al tablei. În rest, putem să plasăm dale ca în figura de mai jos, lăsând 4 pătrăţele neacoperite: colţul din dreapta-sus şi trei pătrăţele în colţul din stânga jos.



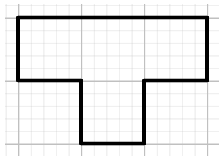
În concluzie, putem plasa $1011^2 - 1$ dale, iar acesta este numărul maxim de dale pe care le putem plasa.

Remarcă: (pe baza rezolvării trimise de *Ioana Vlădoiu*)
În mod natural, se poate pune întrebarea în cazul general: care este numărul maxim de dale care pot fi plasate pe o tablă $n \times n$?
• Pentru $n \equiv 0 \pmod 4$, tabla se descompune în pătrate 4×4 care, aşa cum am văzut, poate fi pavată complet cu dale, deci răspunsul este $\dfrac{n^2}{4}$.
• Pentru $n \equiv 2 \pmod 4$ răspunsul este $\left[\dfrac{n^2}{4}\right] - 1$, iar demonstraţia din cazul $n = 2022$ se extinde uşor.
• Pentru n impar, Ioana arată că $\left[\dfrac{n^2}{4}\right] - 1$ dale pot fi plasate.
Ea arată mai întâi prin inducţie de pas 2 că pe un dreptunghi $(2k-1) \times (2k+1)$ se pot plasa $k^2 - 1$ dale. Exemple pentru $k = 2$ şi $k = 3$ sunt uşor de dat. Apoi, rama (formată din primele două şi ultimele două linii, primele două şi ultimele două coloane) se poate pava complet (pavarea depinde de paritatea lui k), iar interiorul este un dreptunghi $(2k-5) \times (2k-4)$ pe care, potrivit ipotezei de inducţie, se pot plasa $(k-2)^2 - 1$ dale.
Apoi, pe dreptunghiul $2 \times (2k+1)$ se pot plasa k dale (demonstraţia depinde iarăşi de paritatea lui k), deci descompunând pătratul $(2k+1) \times (2k+1)$ într-un dreptunghi $(2k-1) \times (2k+1)$ şi unul $2 \times (2k+1)$ rezultă că putem plasa $k^2 - 1$ dale pe tabla $(2k+1) \times (2k+1)$. Ar mai trebui găsit un argument pentru faptul că nu se pot plasa k^2 dale.

Am primit soluţii de la: *Marius Valentin Drăgoi, Cristian Vergelea, David Mathe, Cristian Muth, Gheorghe Iurea* şi *Ioana Vlădoiu.*

Problem of the week no. 372

A 2022×2022 table is divided into unit squares. We wish to place T-shapes of the form below,



consisting of 4 unit squares, such that each of the squares of the T-shape covers exactly one of the unit squares of the table. T-shapes can be rotated, but they can not overlap. What is the maximum number of T-shapes that can be placed on the table?

the Philippine Mathematical Olympiad, 2020

The official solution can be found here.