Problema săptămânii 371

Determinaţi toate numerele naturale n pentru care există numere naturale $a > b > 0$ astfel încât $n = \dfrac{4ab}{a-b}$.

Josef Tkadlec, MEMO 2023

Soluţie: Vom spune despre un număr cu proprietatea din enunţ că este bun.

• Observăm că orice multiplu al unui număr bun este de asemenea un număr bun deoarece dacă $n = \dfrac{4ab}{a-b}$, cu $a > b > 0$, atunci $mn = \dfrac{4 \cdot ma \cdot mb}{ma - mb}$, cu $ma > mb > 0$.

• Dacă n este bun, atunci $n = \dfrac{4ab}{a-b} = \dfrac{4(a-b)b + 4b^2}{a-b} = 4b + \dfrac{4b^2}{a-b} > 4b \geq 4$, deci numerele mai mici sau egale cu 4 nu sunt bune.

• Alegând $a = b + 4b^2$ obţinem că orice număr de forma $4b+1$, $b \in \mathbb{N}^*$, este bun.

• Alegând $a = b + 2b^2$ obţinem că orice număr de forma $4b+2$, $b \in \mathbb{N}^*$, este bun.

• Alegând $a = b + b^2$ obţinem că orice număr de forma $4b$, $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, este bun.

• Orice număr compus de forma $4k+3$ are un divizor de forma $4b+1$ cu $b \in \mathbb{N}^*$. Acesta fiind bun, conform observaţiei de la început, orice multiplu al său este bun, deci $4k+3$ este bun.

• Vom demonstra numerele prime de forma $n = 4k+3$ nu sunt bune. În caz contrar, am avea $4ab = n(a-b)$. Notând $d = (a,b)$, $a = dx$, $b = dy$, cu $(x,y) = 1$, am avea $4dxy = n(x-y)$. Cum $(x-y, xy) = 1$, avem $x - y \mid 4d$, deci $xy \mid n$. Cum n este prim şi $x > y$, deducem că $x = n$, $y = 1$, deci $4dn = n(n-1)$, de unde $n = 4d+1$, ceea ce contrazice faptul că n este de forma $4k+3$.

În concluzie, numerele bune sunt toate numerele mai mari ca 4, cu excepţia numerelor prime de forma $4k+3$.

Am primit soluţii de la: *Gheorghe Iurea, Alin Valentin Alazaroae, David Mathe, Ioana Vlădoiu* şi *Muth Cristian.*

Problem of the week no. 371

Find all positive integers n, for which there exist positive integers $a > b$, satisfying $n = \dfrac{4ab}{a-b}$.

Josef Tkadlec, MEMO 2023

Solution: We will say about a positive integer n with the above property that it is good.

• We start by noticing that any multiple of a good number is also a good number because, if $n = \dfrac{4ab}{a-b}$, with $a > b > 0$, then $mn = \dfrac{4 \cdot ma \cdot mb}{ma - mb}$, with $ma > mb > 0$.

• If n is good, then $n = \dfrac{4ab}{a-b} = \dfrac{4(a-b)b + 4b^2}{a-b} = 4b + \dfrac{4b^2}{a-b} > 4b \geq 4$, so any good number has to be at least 5.
• Choosing $a = b + 4b^2$ we obtain that any number of the form $4b+1$, $b \in \mathbb{N}$, is good.
• Picking $a = b + 2b^2$, we get that any number of the form $4b+2$, $b \in \mathbb{N}$, is good.
• Picking $a = b + b^2$, we obtain that any number of the form$4b$, $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, is good.
• Any composite number of the form $4k+3$ has a divisor of the form $4b+1$. This divsor being good, so is its multiple, $4k+3$.
• We prove that the primes of the form $n = 4k+3$ are not good. Assuming the contrary to be true, we would have $4ab = n(a-b)$. Putting $d = (a,b)$, $a = dx$, $b = dy$, with $(x,y) = 1$, we would have $4dxy = n(x-y)$. As $(x-y, xy) = 1$, we would have $x - y \mid 4d$, hence $xy \mid n$. As n is prime, and $x > y$, it would follow that $x = n$, $y = 1$, hence $4dn = n(n-1)$, leading to $n = 4d+1$, which contradicts the fact that n is of the form $4k+3$.

In conclusion, the good numbers are all the numbers larger than 4, with the exception of the primes of the form $4k+3$.

The official solution can be found here.