**Problema săptămânii 370**

Fie $ABC$ un triunghi şi $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$. Dacă notăm cu $S_1, S_2, S_3$ şi $S_4$ ariile triunghiurilor $AB'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$, respectiv $A'B'C'$, arătaţi că există $k \in \{1, 2, 3\}$ astfel încât $S_k \leq S_4$.

**Soluţie:** (*David Mathe, Gheorghe Iurea*)
Să notăm cu $S$ aria triunghiului $ABC$, cu $a, b, c$ lungimile laturilor $BC$, $AC$, respectiv $AB$ şi fie $x = \dfrac{AC'}{C'B}$, $y = \dfrac{BA'}{A'C}$, $z = \dfrac{CB'}{B'A}$.
Avem $AC' = \dfrac{x}{1+x} \cdot c$, $AB' = \dfrac{1}{1+z} \cdot b$, deci

$$S_1 = \frac{AB' \cdot AC' \cdot \sin A}{2} = \frac{x}{(1+x)(1+z)} \cdot \frac{bc \sin A}{2} = \frac{x}{(1+x)(1+z)} \cdot S.$$

Analog, $S_2 = \dfrac{y}{(1+x)(1+y)} \cdot S$, $S_3 = \dfrac{z}{(1+y)(1+z)} \cdot S$, deci

$$S_4 = S - (S_1 + S_2 + S_3) = \frac{(1+x)(1+y)(1+z) - x(1+y) - y(1+z) - z(1+x)}{(1+x)(1+y)(1+z)} \cdot S =$$

$$= \frac{1+xyz}{(1+x)(1+y)(1+z)} \cdot S.$$

Presupunem prin absurd că $S_4 < \min\{S_1, S_2, S_3\}$. Atunci $1 + xyz < \min\{x(1+y),\ y(1+z),\ z(1+x)\}$, adică $1 + xyz < x + xy$, $1 + xyz < y + yz$, şi $1 + xyz < z + zx$. Aceste relaţii se scriu echivalent $1 - x < xy(1-z)$, $1 - y < yz(1-x)$, $1 - z < zx(1-y)$.
• Dacă $x \leq 1$, din prima relaţie rezultă că $z < 1$, apoi din ultima că $y < 1$, iar din a doua că $x < 1$. În acest caz însă, înmulţind inegalităţile $0 < 1 - x < xy(1-z)$, $0 < 1 - y < yz(1-x)$, $0 < 1 - z < zx(1-y)$ şi împărţind cu $(1-x)(1-y)(1-z) > 0$ obţinem $1 < x^2y^2z^2$ ceea ce contrazice $x, y, z < 1$.
• Dacă $x > 1$, din relaţia a doua rezultă $y > 1$, apoi din relaţia a treia că $z > 1$. În acest caz însă, înmulţind inegalităţile $x - 1 > xy(z-1) > 0$, $y - 1 > yz(x-1) > 0$, $z - 1 > zx(y-1) > 0$ şi împărţind cu $(x-1)(y-1)(z-1) > 0$ obţinem $1 > x^2y^2z^2$ ceea ce contrazice $x, y, z > 1$.
Aşadar, presupunerea făcută conduce la o contradicţie, deci $\min\{S_1, S_2, S_3\} \leq S_4$.

Alte soluţii pot fi găsite în cartea H. Sedrakyan, N. Sedrakyan − Geometric Inequalities (Springer, 2017), pag. 107-108. Îi mulţumesc lui Titu Zvonaru pentru semnalarea acestei surse.

O consecinţă, semnalată de *Cristian Muth*: $\min\{S_1, S_2, S_3\} \leq \dfrac{S}{4}$. (OIM 1966)

Am primit soluţii de la: *David Mathe, Gheorghe Iurea, Eric-Dimitrie Cismaru* şi *Cristian Muth.*

**Problem of the week no. 370**

Let $ABC$ be a triangle and consider $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$. If $S_1, S_2, S_3$ and $S_4$ denote the area surfaces of triangles $AB'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$, and $A'B'C'$, respectively, prove that there exists $k \in \{1, 2, 3\}$ such that $S_k \leq S_4$.

**Solution:** (*David Mathe, Gheorghe Iurea*)
Let $S$ be the surface area of triangle $ABC$, and let $a, b, c$ denote the lengths of the sides $BC$, $AC$, and $AB$ respectively. Also, put $x = \dfrac{AC'}{C'B}$, $y = \dfrac{BA'}{A'C}$, $z = \dfrac{CB'}{B'A}$.
We have $AC' = \dfrac{x}{1+x} \cdot c$, $AB' = \dfrac{1}{1+z} \cdot b$, hence

$$S_1 = \frac{AB' \cdot AC' \cdot \sin A}{2} = \frac{x}{(1+x)(1+z)} \cdot \frac{bc \sin A}{2} = \frac{x}{(1+x)(1+z)} \cdot S.$$

Similarly, $S_2 = \dfrac{y}{(1+x)(1+y)} \cdot S$, $S_3 = \dfrac{z}{(1+y)(1+z)} \cdot S$, hence

$$S_4 = S - (S_1 + S_2 + S_3) = \frac{(1+x)(1+y)(1+z) - x(1+y) - y(1+z) - z(1+x)}{(1+x)(1+y)(1+z)} \cdot S =$$

$$= \frac{1 + xyz}{(1+x)(1+y)(1+z)} \cdot S.$$

Assume that $S_4 < \min\{S_1, S_2, S_3\}$. Then $1 + xyz < \min\{x(1+y),\ y(1+z),\ z(1+x)\}$, i.e. $1 + xyz < x + xy$, $1 + xyz < y + yz$, şi $1 + xyz < z + zx$. These relations can be written equivalently $1 - x < xy(1-z)$, $1 - y < yz(1-x)$, $1 - z < zx(1-y)$.
• If $x \leq 1$, from the first relation we get $z < 1$, then from the last one $y < 1$, and finally the second relation shows that $x < 1$. But multiplying together the inequalities $0 < 1 - x < xy(1-z)$, $0 < 1 - y < yz(1-x)$, $0 < 1 - z < zx(1-y)$ and dividing by $(1-x)(1-y)(1-z) > 0$ we get $1 < x^2y^2z^2$, which contradicts $x, y, z < 1$.
• If $x > 1$, from the second relation we get $y > 1$, then from the third one $z > 1$. In this case, however, multiplying together the inequalities $x - 1 > xy(z-1) > 0$, $y - 1 > yz(x-1) > 0$, $z - 1 > zx(y-1) > 0$ and dividing by $(x-1)(y-1)(z-1) > 0$ we get $1 > x^2y^2z^2$, which contradicts $x, y, z > 1$.
This, the assumption we have made leads to a contradiction, therefore it is false, hence $\min\{S_1, S_2, S_3\} \leq S_4$.

A consequence of this problem, $\min\{S_1, S_2, S_3\} \leq \dfrac{S}{4}$, was given in 1966 at the IMO.

Other solutions can be found in H. Sedrakyan, N. Sedrakyan − Geometric Inequalities (Springer, 2017), pp. 107-108.