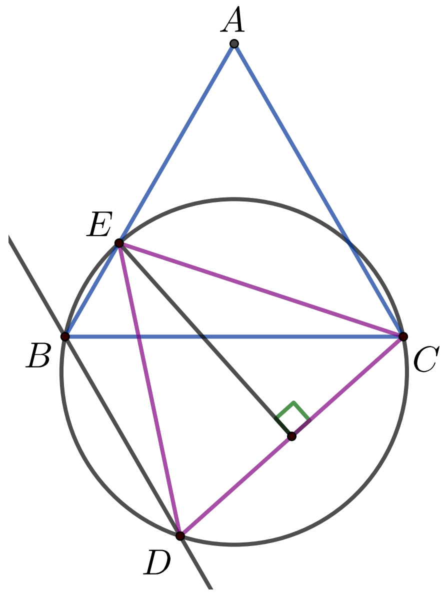
Problema săptămânii 369

Fie ABC un triunghi echilateral. Pe paralela dusă prin B la dreapta AC, de aceeaşi parte a lui AB ca şi C, se consideră un punct D. Mediatoarea segmentului $[CD]$ intersectează dreapta AB în punctul E. Demonstraţi că triunghiul CDE este echilateral.

baraj Olanda, 2015

Soluţia 1: În triunghiul BCD, mediatoarea laturii $[CD]$ se intersectează cu bisectoarea exterioară $(BA$ a unghiului B într-un punct aflat pe cercul circumscris triunghiului BCD. Deducem că punctele B, C, D, E sunt conciclice, deci $m(\angle CED) = m(\angle CBD) = 60°$. Triunghiul CDE este aşadar isoscel cu un unghi de $60°$, deci echilateral.



Soluţia 2: Fie $E' \in (AB$ astfel ca $AE' = BD$. Atunci triunghiurile CAE' şi CBD sunt congruente (LUL), deci $CE' = CD$ şi $\angle ACE' \equiv \angle BCD$. Deducem că $m(\angle E'CD) = m(\angle BCA) = 60°$, deci triunghiul CDE' este echilateral. Atunci E' este intersecţia dintre mediatoarea lui $[CD]$ şi dreapta AB, adică $E' = E$. Conchidem că triunghiul CDE este echilateral.

Remarcă: Afirmaţia din enunţ este valabilă oricare ar fi poziţia punctului D pe paralela prin B la AC.

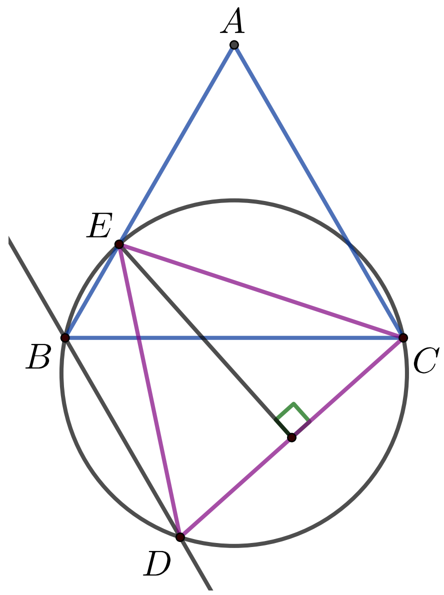
Am primit soluţii de la: *Titu Zvonaru, David Mathe* (2 soluţii), *Cristian Muth, Gheorghe Iurea* (2 soluţii), *Valentin Alin Alăzăroae, Mihai Miculiţa, Alexandru Ciobotea* şi *Ioana Vlădoiu.*

Problem of the week no. 369

Let ABC be an equilateral triangle. On the line through B parallel to AC consider a point D, such that D and C are on the same side of the line AB. The perpendicular bisector of CD intersects the line AB in E. Prove that triangle CDE is equilateral.

Dutch TST, 2015

Solution 1: In triangle BCD, the perpendicular bisector of side $[CD]$ intersects the exterior angle bisector $(BA$ of angle B at a point situated on the circumcircle of triangle BCD (the midpoint of the arc CBD). It follows that points B, C, D, E are concyclic, hence $\angle CED = \angle CBD = 60°$. Thus, triangle CDE is isosceles with an angle of $60°$, therefore equilateral.



Solution 2: Consider $E' \in (AB$ such that $AE' = BD$. Triangles CAE' and CBD are congruent (SAS), therefore $CE' = CD$ and $\angle ACE' = \angle BCD$. It follows that $\angle E'CD = \angle BCA = 60°$, hence triangle CDE' is equilateral. Then E' is the intersection point of the perpendicular bisector of $[CD]$ and the line AB, i.e. $E' = E$. We conclude that CDE is equilateral.

Remark: The statement of the problem is true regardless of the position of point D on the parallel through B to AC.

Other solutions can be found on AoPS.