Problema săptămânii 368

Fie $n > 1$ un număr natural. Pe tablă se scriu numerele $1, 2, \ldots, n$. Ana şi Bogdan încercuiesc, alternativ, câte un număr neîncercuit de pe tablă, Ana fiind cea care mută prima. Jocul se încheie atunci când produsul numerelor încercuite devine multiplu de n, jucătorul care a efectuat ultima mutare pierzând. Pentru care valori ale lui n are Bogdan strategie câştigătoare?

Max Lu, ELMO 2022

Soluţie:

Vom arăta că Bogdan are strategie câştigătoare dacă n este impar şi liber de pătrate (adică nu este divizibil cu pătrătului niciunui număr prim).

Pentru început, arătam că, pentru celelalte valori ale lui n, Ana este cea care are strategie câştigătoare.

• Dacă n este divizibil cu p^2, unde p este un număr prim, Ana începe prin a încercui numărul $\frac{n}{p}$. De-acum, jocul se încheie atunci cineva încercuieşte din nou un număr divizibil cu p. Pe tablă erau $\frac{n}{p}$ numere divizibile cu p, deci sunt $n - \frac{n}{p} = \frac{n(p-1)}{p}$ numere nedivizibile cu p. Deoarece acest număr este par oricare ar fi numărul prim p, primul care va fi nevoit să încercuiască un număr divizibil cu p va fi Bogdan, deci Ana va câştiga.

• Dacă $n \equiv 2 \pmod 4$, Ana încercuieşte numărul $\frac{n}{2}$. De-acum, jocul se încheie exact atunci când se încercuieşte pentru prima oară un număr par. În total sunt $\frac{n}{2}$ numere impare, incluzând şi numărul încercuit de Ana. Primul jucător care va fi nevoit să încercuiască un număr par va fi Bogdan. Astfel, Ana va câştiga.

Să arătăm acum că dacă n este impar şi liber de pătrate, Bogdan poate câştiga. O strategie simplă este următoarea: dacă Ana încercuieşte k, Bogdan încercuieşte $n - k$ (deoarece n este impar, acest lucru este posibil). Dacă după mutarea Anei, produsul numerelor încercuite nu era încă divizibil cu n, deci exista un divizor prim p al lui n cu care acest produs nu era divizibil, înseamnă că $p \nmid k$, deci $p \nmid n - k$, ceea ce arată că nici după mutarea lui Bogdan produsul numerelor nu va fi divizibil cu p, deci nici cu n.

O altă strategie pentru Bogdan: dacă Ana încercuieşte $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_j$, ea a pierdut; dacă nu, numărul ales de ea nu va fi divizibil cu fiecare din divizorii primi ai lui n, deci Bogdan poate alege un număr (diferit de al Anei) care, înmulţit cu numărul ales de Ana, să fie divizibil cu fiecare din numerele $p_1, p_2, \ldots, p_j$, cu o excepţie, să zicem p_i. De-acum, cine alege un multiplu al lui p_i pierde, restul mutărilor asigurând continuarea jocului. Iniţial, pe tablă erau n numere, dintre care $\frac{n}{p_i}$ divizibile cu p_i. Restul, $n - \frac{n}{p_i}$ sunt nedivizibile cu p_i, iar acestea sunt în număr par, deci Ana va fi cea care va fi obligată să încercuiască un număr divizibil cu p_i.

Am primit soluţii de la: *Eric-Dimitrie Cismaru* şi *David Mathe*.

Problem of the week no. 368

Let $n > 1$ be an integer. The numbers $1, 2, \ldots, n$ are written on a board. Alice and Bob take turns circling an uncircled number on the board, with Alice going first. When the product of the circled numbers becomes a multiple of n, the game ends and the last player to have circled a number loses. For which values of n can Bob guarantee victory?

Max Lu, ELMO 2022

Solution:
We prove that Bob has a winning strategy if and only if n is odd and squarefree (i.e. not divisible by the square of any prime).
First, we show that for all the other values of n, it is Alice who has a winning strategy.
• If n is divisible by p^2, where p is a prime number, Alice starts by circling the number $\frac{n}{p}$. From this point on, the game ends when someone circles again a number divisible by p. On the board, there were $\frac{n}{p}$ numbers divisible by p, hence there are $n - \frac{n}{p} = \frac{n(p-1)}{p}$ numbers not divisible by p. As this is an even number whatever the prime p may be, the first to be obliged to circle a multiple of p is Bob, so Alice will win.
• If $n \equiv 2 \pmod 4$, Alice circles the number $\frac{n}{2}$. From this point on, the game ends the instant someone circles the first time an even number. In total there are $\frac{n}{2}$ odd numbers, including the number circled by Alice. Thus, the first player to be obliged to circle an even number is Bob, so Alice will win.

Let us now prove that if n is odd and squarefree, Bob can win. An easy strategy for Bob is the following one: if Alice circles k, Bob circles $n-k$ (this is possible because n is odd). If after Alice's move the product of the circled numbers was not yet a multiple of n, i.e. there was a prime divisor p of n that did not divide the product of the circled numbers. This means that $p \nmid k$, hence $p \nmid n-k$, which shows that after Bob's move the product of the circled numbers was still not a multiple of p, hence not a multiple of n. Whenever Alice has an available move, so does Bob.

Another strategy for Bob: if Alice circles $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_j$, she has just lost; if she chooses another number, the number she chose will not be divisible by all the prime divisors of n, so Bob can pick a number (different from Alice's number) which, multiplied by the number chosen by Alice, to be divisible by all the prime factors $p_1, p_2, \ldots, p_j$ of n, with a single exception, say p_i. From this point on, whoever chooses a multiple of p_i loses, all the other moves insuring the continuation of the game. Initially, on the board there were n numbers, $\frac{n}{p_i}$ of which divisible by p_i. The other $n - \frac{n}{p_i}$ ones are not divisible by p_i, and there are an even number of these, therefore Alice is the one that will be obliged to circle a multiple of p_i.