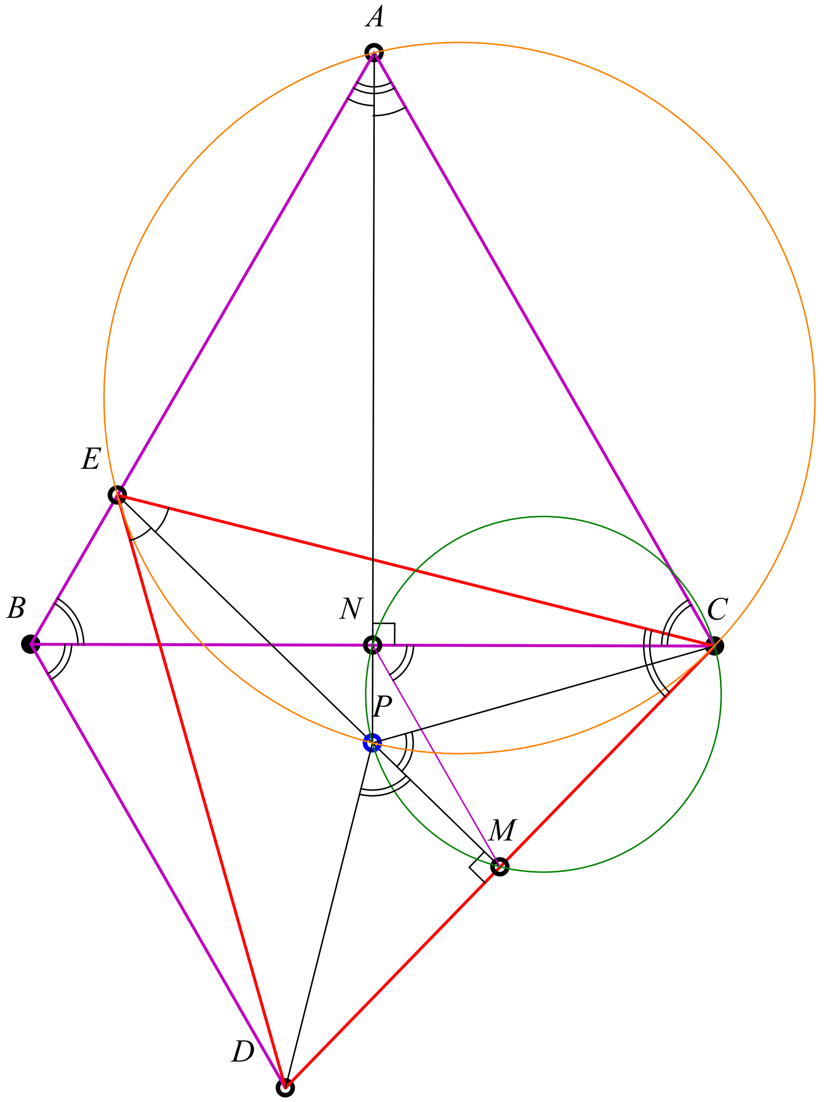
Problema săptămânii 369 (4-10 septembrie 2023):

Fie ABC un triunghi echilateral. Pe paralela dusă prin B la dreapta AC, de aceeaşi parte a lui AB ca şi C, se consideră un punct D. Mediatoarea segmentului $[CD]$ intersectează dreapta AB în punctul E. Demonstraţi că triunghiul CDE este echilateral.



SOLUŢIE (Mihai Miculiţa): $E-$ fiind un punct al mediatoarei segmentului $[CD]$, el este egal depărat faţă de capetele segmetului $[CD]$, aşa că avem: $[EC]\equiv[ED]$. (1)

Notând acum cu $M-$mijlocul lui $[CD]$ şi cu $N-$mijlocul lui $[BC]$; iar cu: $\{P\}:=ME\cap AN$ (v.Fig.), din faptul că:

$$\left.\begin{array}{r}\boxed{[EC]\equiv[ED]}(1)\\ [MD]\equiv[MC](c.a.)\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}EM\perp CD \quad (2)\\ \widehat{MEC}\equiv\widehat{MED}\Rightarrow m\left(\widehat{CED}\right)=2\cdot m\left(\widehat{MEC}\right); \quad (3)\end{cases}$$

şi din:

$$\left.\begin{array}{r}[AB]\equiv[BC]\equiv[AC](ip)\\ [NB]\equiv[NC](c.a.)\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}AN\perp BC \quad (4)\\ m\left(\underline{\widehat{CAB}}\right)=m\left(\widehat{BCA}\right)=60^0 \ (5)\Rightarrow\end{cases}$$

$$\Rightarrow m\left(\widehat{NAC}\right)=m\left(\widehat{NAB}\right)=\frac{1}{2}.m\left(\underline{\widehat{CAB}}\right)\overset{(5)}{=}30^0. \quad (6)$$

Pe de altă parte, din faptul că

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}[MD]\equiv[MC]\\ [NB]\equiv[NC]\end{array}\right\}\Rightarrow MN\parallel BC\\ BC\parallel AC\ (ip)\end{array}\right\}\Rightarrow MN\parallel AC\Rightarrow \widehat{CNM}\equiv\underline{\widehat{BCA}} \atop [AB]\equiv[BC]\equiv[AC]\,(ip)\Rightarrow \underline{\widehat{BCA}}\equiv\widehat{CAB}\quad\right\}\Rightarrow \widehat{CNM}\equiv\widehat{CAB}\quad (7)$$

şi din:

$$\left.\begin{array}{r}[AB]\equiv[AC]\\ [NB]\equiv[NC]\end{array}\right\}\Rightarrow AP(=AN)\perp BC.\quad (8)$$

iar din faptul că:

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}AP\perp BC\ (8)\\ EM\perp CD\ (2)\end{array}\right\}\Rightarrow m\left(\widehat{CNP}\right)=m\left(\widehat{PMD}\right)=90^0\Rightarrow CNPM-inscriptibil\Rightarrow \widehat{CPM}\equiv\underline{\widehat{CNM}}\\ \underline{\widehat{CNM}}\equiv\widehat{CAB}\ (7)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \widehat{CPM}\equiv\widehat{CAB}(=\widehat{CAE})\Rightarrow AEPC-inscriptibil\Rightarrow m\left(\widehat{CEM}\right)=m\left(\widehat{CAN}\right)=30^0\quad (9)$$

şi ţinând acum seama de relaţia (9), din triunghiul $EMC-dreptunghic\ in\ M$ obţinem, că:

$$m\left(\widehat{ECD}\right)=90^0-m\left(\widehat{CEM}\right)=90^0-30^0=60^0\Rightarrow \boxed{m\left(\widehat{ECD}\right)=60^0}.\quad (10)$$

În fine din (1) şi (10), rezultă că triunghiul $\boxed{CDE\ \textbf{este un triunghi echilateral}}$ (având în vedere, faptul că: **orice triunghi isoscel care are un unghi de** 60^0, **este un triunghi echilateral!**). ■