BARAJE DE JUNIORI, AZERBAIDJAN, 2022

1. Determinaţi toate numerele naturale nenule a, b, c pentru care $ab+1$, $bc+1$ şi $ca+1$ sunt, toate trei, factorialele unor numere naturale.

Este problema N1 din ShortList JBMO 2021, vezi aici.

2. Numerele reale pozitive a, b, c satisfac $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{3}{abc}$. Arătaţi că

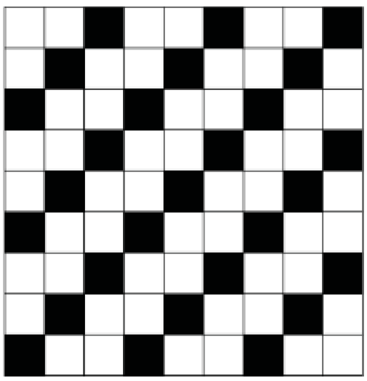
$$\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+1}+\frac{b^2+c^2}{b^2+c^2+1}+\frac{c^2+a^2}{c^2+a^2+1} \geq 2.$$

Vezi aici.

3. În triunghiul ascuţitunghic scalen ABC, H este ortocentrul, iar BD şi CE sunt înălţimi. X, Y sunt simetricele lui A faţă de D, respectiv E şi $X \in [CD]$, $Y \in [EB]$. Cercurile circumscrise triunghiurilor HXY şi ADE se intersectează din nou în F ($F \neq H$). Demonstraţi că AF trece prin mijlocul M al laturii BC.

Vezi aici.

4. Fie n un număr natural nenul. Se consideră o tablă $3n \times 3n$ ale cărui pătrăţele unitate se colorează cu alb sau negru astfel încât, pornind din colţul din stânga-sus, fiecare a treia diagonală este colorată cu negru, restul tablei fiind colorat cu alb. Figura de mai jos ilustrează colorarea în cazul particular $n = 3$.



La o mutare, se poate alege un pătrat 2×2 şi schimba culoarea fiecăruia din cele 4 pătrăţele în felul următor: pătrăţelele albe devin portocalii, cele portocalii devin negre, iar cele negre devin albe. Determinaţi toate valorile lui n pentru care, după un număr finit de mutări, se ajunge ca toate pătrăţelele care la început erau albe să fie negre, iar toate pătrăţelele care la început erau negre să fie albe.

Este problema C2 din ShortList JBMO 2021. Vezi aici sau aici.

5. Alice şi Bob formează o echipă care joacă un joc pe o tablă 100×100 ale cărui pătrăţele unitate sunt la început albe. Alice aranjează tabla colorând cu roşu exact k dintre pătrăţelele unitate. După aceea, o mutare legală pentru Bob este de a alege o linie sau o coloană care are cel puţin 10 pătrăţele roşii şi să coloreze cu roşu şi restul pătrăţelelor de pe linia/coloana aleasă. Care este cea mai mică valoare a lui k pentru care Alice poate aranja tabla în aşa fel încât Bob să poată colora cu roşu toată tabla după un număr finit de mutări?

Este problema C4 din ShortList JBMO 2021. Vezi aici.