BARAJE DE JUNIORI, AZERBAIDJAN, 2018
barajul 2

1. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic. Notăm picioarele înălţimilor din A, B şi C cu D, E, respectiv F şi ortocentrul triunghiului ABC cu H. Fie P punctul de intersecţie a dreptei BE cu segmentul $[DF]$. Perpendiculara din P pe BC intersectează AB în Q. Fie $\{N\} = EQ \cap AH$. Demonstraţi că N este mijlocul segmentului $[AH]$.

O soluţie, dar nu pentru juniori aici.

2. a) Determinaţi mulţimea

$$A = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 | a + b + c = 3, (6a + b^2 + c^2)(6b + c^2 + a^2)(6c + a^2 + b^2) \neq 0\}.$$

b) Demonstraţi că pentru orice $(a, b, c) \in A$ are loc inegalitatea

$$\frac{a}{6a + b^2 + c^2} + \frac{b}{6b + c^2 + a^2} + \frac{c}{6c + a^2 + b^2} \leq \frac{3}{8}$$

Problema, propusă de *George Picu*, s-a dat la barajul 1 din România în 2017. Vezi aici.

3. Determinaţi cvadrupletele de numere naturale (x, y, z, u) care verifică ecuaţia

$$2^x + 3^y + 5^z = 7^u.$$

Vezi aici.

4. La început, pe masă se află 100 de cartonaşe, fiecare având scris pe el câte un număr natural nenul. Pe exact 43 dintre cartonaşe stă scris un număr impar. La fiecare minut se efectuează următoare operaţie: pentru oricare trei cartonaşe (distincte) de pe masă se calculează produsul numerelor scrise pe cele trei cartonaşe, se face suma numerelor obţinute, iar această sumă este scrisă pe un cartonaş nou, care va fi apoi aşezat pe masă. A doua zi, se constată că pe masă se află un cartonaş pe care stă scris un număr divizibil cu 2^{2018}. Demonstraţi că la o oră de la începutul procesului pe masă exista un cartonaş pe care era scris un număr divizibil cu 2^{2018}.