**BARAJE DE JUNIORI, AZERBAIDJAN, 2017**
**barajul 1**

**1.** Fie $x, y, z, t$ numere reale pozotive. Arătaţi că

$$\frac{xyzt}{(x+y)(z+t)} \leq \frac{(x+z)^2(y+t)^2}{4(x+y+z+t)^2}.$$

Sursa: Olimpiadă Belarus, 2017. Vezi aici.

**2.** Fie $ABC$ un triunghi isoscel ($AB = BC$), iar $K$ şi $M$ mijloacele laturilor $AB$, respectiv $AC$. Cercul circumscris triunghiului $BKC$ intersectează dreapta $BM$ în punctul $N$, diferit de $B$. Paralela prin $N$ la $AC$ intersectează cercul circumscris triunghiului $ABC$ în $A_1$ şi $C_1$. Demonstraţi că triunghiul $A_1BC_1$ este echilateral.

Vezi aici.

**3.** Spunem despre un număr natural că este ,,minunat" dacă există cinci divizori distncţi ai săi, $a, b, c, d, e$ astfel ca $n = a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4$.
a) Arătaţi că toate numerele minunate sunt divizibile cu 5.
b) Există o infinitate de numere minunate?

Vezi aici.

**4.** Piaţa centrală a Oraşului Matematicienilor este un pătrat $n \times n$ pavat cu dale $1 \times 1$. Pentru a ilumina piaţa, trebuie plasate felinare în colţuri ale dalelor, inclusiv pe marginea pieţei. Fiecare felinar iluminează fiecare dală în al cărei colţ se află. Determinaţi numărul minim de felinare care trebuie plasate astfel ca, şi dacă unul dintre felinare se defectează şi nu mai luminează, întreaga piaţă centrală să fie iluminată.

Vezi aici.