BARAJE DE JUNIORI, AZERBAIDJAN, 2015

Toate problemele date la barajele din 2015 provin din ShortList JBMO 2014.

barajul 3

1. Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 = 48$. Arătaţi că

$$a^2\sqrt{2b^3 + 16} + b^2\sqrt{2c^3 + 16} + c^2\sqrt{2a^3 + 16} \leq 24^2.$$

Când are loc egalitatea?

Vezi problema A7 din ShortList JBMO 2014, aici.

2. Pe o tablă sunt scrise nişte numere reale (cel puţin două). La fiecare pas putem alege două numere de pe tablă, să zicem a şi b, să le ştergem de pe tablă şi să scriem pe tablă numărul $\dfrac{ab}{a+b}$. Continuăm până când pe tablă rămâne un singur număr. Demonstraţi că numărul rămas nu depinde de alegerile făcute ale numerelor ce au fost şterse de pe tablă.

Variantă a problemei C1 din ShortList JBMO 2014, vezi aici. Probabil că numerele ar fi trebuit să fie pozitive, altminteri există riscul ca la un moment dat să nu mai putem face mutări (dacă toate numerele de pe tablă sunt 0 sau dacă pe tablă mai sunt două numere care sunt opuse).

3. Fie ABC un triunghi cu $AB \neq BC$ şi fie $(BD$ bisectoarea interioară a unghiului $\sphericalangle ABC$, $(D \in AC)$. Fie M mijlocul arcului AC care conţine punctul B. Cercul circumscris triunghiului BDM intersectează segmentul $[AB]$ în punctul $K \neq B$. Fie J simetricul lui A faţă de K. Dacă $DJ \cap AM = \{O\}$, demonstraţi că punctele J, B, M, O sunt conciclice.

Vezi problema G5 din ShortList JBMO 2014, aici sau aici.

4. Găsiţi toate soluţiile întregi ale ecuaţiei $x^2 = y^2(x + y^4 + 2y^2)$.

Vezi problema N3 din ShortList JBMO 2014, aici.