BARAJE DE JUNIORI, AZERBAIDJAN, 2015

Toate problemele date la barajele din 2015 provin din ShortList JBMO 2014.

barajul 1

1. Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $a + b + c = 1$. Arătaţi că

$$\frac{7+2b}{1+a} + \frac{7+2c}{1+b} + \frac{7+2a}{1+c} \geq \frac{69}{4}.$$

Când are loc egalitatea?

Vezi problema A4 din ShortList JBMO 2014, aici.

2. Fie $A = 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 2014$ produsul numerelor mai mici sau egale cu 2014 care dau restul 1 la împărţirea cu 3. Aflaţi ultima cifră nenulă a lui A.

Vezi problema G2 din ShortList JBMO 2014, aici.

3. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic în care $AB < AC < BC$ şi fie $c(O, R)$ cercul său circumscris. Fie D şi E punctele diametral opuse punctelor B, respectiv C. Cercul $c_1(A, AE)$ intersectează AC în punctul K, iar cercul $c_2(A, AD)$ intersectează AB în punctul L (A este între B şi L). Demonstraţi că dreptele EK şi DL se intersectează pe cercul c.

Vezi problema C4 din ShortList JBMO 2014, aici.

4. Arătaţi că nu există numere întregi a şi b care să verifice următoarele condiţii:
i) $16a - 9b$ este număr prim
ii) ab este pătrat perfect
iii) $a + b$ este pătrat perfect.

Vezi problema N4 din ShortList JBMO 2014, aici.