

BARAJE DE JUNIORI, AZERBAIDJAN, 2016
barajul 1

1. Fie $a, b, c \geq 0$ astfel încât $a + b + c = 3$. Arătați că

$$2(ab + bc + ca) - 3abc \geq \sum_{cyc} a \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}}.$$

Vezi aici.

2. Fie $ABCD$ un patrulater circumscriptibil. Fie M un punct pe latura AB . Fie I_1, I_2 și I_3 centrele cercurilor înscrise în triunghiurile AMD, CMD , respectiv BMC . Demonstrați că $I_1I_2I_3M$ este circumscriptibil.

Vezi problema G1 din ShortList BMO 2016, vezi aici.

3. Determinați toate perechile de numere prime (p, q) astfel încât $p^3 + p = q^2 + q$.

Vezi aici.

4. Pe masă sunt trei grămezi de jetoane: prima conține a , a doua b , iar a treia c jetoane, unde $a \geq b \geq c$. Jucătorii A și B mută alternativ. A mută primul. La fiecare mutare, jucătorul aflat la rând alege două grămezi, apoi ia un număr de jetoane (minim unul) din grămada aleasă care are mai puține jetoane și le mută în grămada aleasă care are mai multe jetoane. Dacă grămezile alese au număr egal de jetoane, jucătorul ia cel puțin un jeton dintr-una din grămezi și le mută în cealaltă. Un jucător câștigă dacă după mutarea sa pe masă rămâne o singură grămadă. În funcție de valorile lui a, b, c , stabiliți care dintre cei doi jucători are strategie câștigătoare.