Problema săptămânii 367

Spunem despre un număr natural că este un *palindrom* dacă numărul nu se modifică dacă îi scriem cifrele în ordine inversă. De exemplu, 2002 este un palindrom. Arătaţi că dacă n şi $3n$ sunt palindromuri, atunci şi $2n$ este palindrom.

F. Petrov, Olimpiadă Sankt Petersburg, 2002

Soluţie: Vom arăta că singurele numere cu proprietatea din ipoteză sunt palindromurile ale căror cifre sunt numai din mulţimea $\{0, 1, 2, 3\}$. La înmulţirea cu 2 a unui asemenea număr cifrele lui n se dublează şi se obţine un nou palindrom.
Dacă n are o cifră, atunci $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ pentru că altminteri $3n$ ar avea două cifre şi, fiind palindrom, ar avea cifrele egale. Dar atunci $11 \mid 3n$ implică $11 \mid n$, absurd.
Dacă $n = \overline{a_1a_2\ldots a_k}$ este un palindrom cu $k \geq 2$, atunci $a_1 = a_k$.
• Dacă $a_1 = a_k = 4$, prima cifră a lui $3n$ va fi 1, ultima cifră va fi 2, deci $3n$ nu este palindrom.
• Dacă $a_1 = a_k = 5$, prima cifră a lui $3n$ va fi 1, ultima cifră va fi 5, deci $3n$ nu este palindrom.
• Dacă $a_1 = a_k = 6$, prima cifră a lui $3n$ va fi 1 sau 2, ultima cifră va fi 8, deci $3n$ nu este palindrom.
• Dacă $a_1 = a_k = 7$, prima cifră a lui $3n$ va fi 2, ultima cifră va fi 1, deci $3n$ nu este palindrom.
• Dacă $a_1 = a_k = 8$, prima cifră a lui $3n$ va fi 2, ultima cifră va fi 4, deci $3n$ nu este palindrom.
• Dacă $a_1 = a_k = 9$, prima cifră a lui $3n$ va fi 2, ultima cifră va fi 7, deci $3n$ nu este palindrom.
• Dacă $a_1 = a_k \in \{1, 2, 3\}$, ultima cifră a lui $3n$ va fi $3a_k$, deci pentru ca $3n$ să poată fi palindrom este necesar să nu avem trecere peste ordin la înmulţirea cu 3 a numărului $n' = \overline{a_1a_2\ldots a_k} - \overline{a_10\ldots 0a_k}$.
Conchidem că un palindrom n are proprietatea din enunţ dacă prima sa cifră este 1, 2 sau 3, iar numărul obţinut prin ştergerea primei şi ultimei sale cifre este tot un palindrom care are proprietatea din enunţ (prin abuz, prima şi ultima cifră a acestuia putând fi şi 0).
Continând în acest fel, deducem că singurele numere cu proprietatea din enunţ sunt palidromurile care au numai cifre 0, 1, 2 şi 3, numere pentru care, în mod evident, $2n$ este tot palindrom.

Am primit soluţii de la: *Ioan Viorel Codreanu, David Mathe, Titu Zvonaru, Eric-Dimitrie Cismaru, Alin Valentin Alazaroae* şi *Alexandru Ciobotea.*

Problem of the week no. 367

A positive integer is called a *palindrome* if it does not change when we mirror its digits in decimal system (for example 2002 is a palindrome). Prove that if n and $3n$ are palindromes, then $2n$ is also a palindrome.

F. Petrov, St. Petersburg MO, 2002

Solution: We prove that the only palindromes to satisfy the hypothesis are those whose digits belong to the set $\{0, 1, 2, 3\}$. Multiplying by 2 such a number clearly gives a palindrome.

If n has only one digit, then $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ because otherwise $3n$ would have two digits and, being a palindrome, would have equal digits. But then $11 \mid 3n$ which means that $11 \mid n$, absurd.

If $n = \overline{a_1 a_2 \ldots a_k}$ is a palindrome with $k \geq 2$, then $a_1 = a_k$.

- If $a_1 = a_k = 4$, the first digit of $3n$ is 1, the last digit is 2, so $3n$ is not a palindrome.
- If $a_1 = a_k = 5$, the first digit of $3n$ is 1, the last digit is 5, so $3n$ is not a palindrome.
- If $a_1 = a_k = 6$, the first digit of $3n$ is 1 or 2, the last digit is 8, so $3n$ is not a palindrome.
- If $a_1 = a_k = 7$, the first digit of $3n$ is 2, the last digit is 1, so $3n$ is not a palindrome.
- If $a_1 = a_k = 8$, the first digit of $3n$ is 2, the last digit is 4, so $3n$ is not a palindrome.
- If $a_1 = a_k = 9$, the first digit of $3n$ is 2, the last digit is 7, so $3n$ is not a palindrome.
- If $a_1 = a_k \in \{1, 2, 3\}$, the last digit of $3n$ is $3a_k$, so in order for $3n$ to be a palindrome, it is necessary not to have carry overs when multiplying by 3 the number $n' = \overline{a_1 a_2 \ldots a_k} - \overline{a_1 0 \ldots 0 a_k}$.

We conclude that a palindrome n has the property that $3n$ is also a palindrome if and only if the first digit is 1, 2 or 3, and the number obtained by erasing its first and last digits is also a palindrome satisfying the same property (we agree to accept here numbers beginning and ending with the digit 0 0).

Continuing this way, we deduce that the only palindromes n for which $3n$ is also a palindrome are those that only contain digits 0, 1, 2 and/or 3, numbers for which, clearly, $2n$ is also a palindrome.